PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA UND N. HOFREITER
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

61. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
Mit 15 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM NOVEMBER 1957

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1957

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

61. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Schmidt, W. Mittelwerte über Gitter 269

Wunderlich, W. Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel . . . 277

Ragab, F. M. On the Product of Two Confluent Hypergeometric Functions 312

Lomnicki, Z. A. and S. K. Zaremba. On Some Moments and Distributions Occurring in the Theory of Linear Stochastic Processes I. 318

Buchbesprechungen 359

Mittelwerte über Gitter

Von

Wolfgang Schmidt, Missoula (Montana), U.S.A.

(*Eingegangen am 13. Februar 1957*)

Einleitung. Sei $f(X_1, \ldots, X_k)$ eine nicht-negative, Borel-integrierbare Funktion im R_{nk}, wobei $X_1, X_2, \ldots, X_k$ Punkte im R_n bedeuten. Unter A wollen wir $n \times n$-Matrizen mit Determinante $|A| = 1$, unter $d\omega$ das von *C. L. Siegel*[1] eingeführte invariante Volumelement im Raum $\mathfrak{A}$ dieser Matrizen verstehen. Ist $\mathfrak{U}$ die Untergruppe der eigentlichen unimodularen Transformationen U in $\mathfrak{A}$, dann gibt es in $\mathfrak{A}$ einen beschränkten Fundamentalbereich für die Darstellung $A \to AU$ der Gruppe $\mathfrak{U}$, den wir mit $F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})$ bezeichnen wollen. $d\omega$ sei so normiert, daß

$$\int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} d\omega = 1. \tag{1}$$

Kürzlich bewies *C. A. Rogers*[2] eine nützliche Formel für Integrale der Form

$$\int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{g_1, \ldots, g_k} f(Ag_1, Ag_2, \ldots, Ag_k)\, d\omega. \tag{2}$$

Die Summe unter dem Integral ist über alle k-tupel $g_1, \ldots, g_k$ von Punkten mit ganzzahligen Koordinaten zu erstrecken und es ist $k < n$. Allgemein werden wir in dieser Arbeit unter $g, h, \ldots$ Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, also Punkte aus dem natürlichen Gitter, verstehen.

C. A. Rogers führt seinen Beweis über den Umweg eines anders definierten Mittelwertes und bemerkt: „It seems likely, that the ... ...result could also be proved by Siegel's method". In dieser Arbeit geben wir für *Rogers'* Formel einen neuen Beweis, der sich enger an *Siegels* Methode hält. Es stellt sich heraus, daß die Hauptschwierigkeit im Beweis der Formel

---

[1] *C. L. Siegel*, Annals of Math., **46** (1945), 340—347.

[2] *C. A. Rogers*, Acta Math., **94** (1955), 249—287.

$$\int\limits_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{g_1, \ldots, g_m \in H_m} f(Ag_1, \ldots, Ag_m)\, d\omega = \int f(X_1, \ldots, X_m)\, dX_1 \ldots dX_m \qquad (3)$$

besteht, wobei $m < n$ und H_m die Menge aller m-tupel linear unabhängiger Punkte $g_1, g_2, \ldots, g_m$ ist. Diese Formel wurde von *Siegel* selbst ohne Beweis angegeben.

Bevor wir unser Hauptresultat in Satz 3 beweisen, leiten wir einige später benötigte Sätze her, die selbst nicht uninteressant sind.

1. *Siegel*[1] bewies für beschränkte, Riemann-integrierbare Funktionen, die außerhalb eines beschränkten Bereiches verschwinden, die Formel

$$\int\limits_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{g \in H_1} f(Ag)\, d\omega = \int f(X)\, dX. \qquad (4)$$

Man kann (4) leicht für beschränkte Borel-integrierbare Funktionen zeigen, die außerhalb eines beschränkten Bereiches verschwinden. Ist nämlich $f(X)$ Borel-integrierbar, dann ist auch $f(Ag)$ Borel-integrierbar in $\mathfrak{A}$. Weiter gibt es zu jedem Borel-integrierbaren f mit $|f| \leqq K$ und $f(X) = 0$ für $|X| \geqq K$ eine Folge von sowohl Borel- wie Riemann-integrierbaren Funktionen f_s^1, f_s^2, die $|f^i| \leqq K, f^i(X) = 0$ für $|X| \geqq K$ erfüllen und die überall bis auf eine Menge von einem Maße $< \frac{1}{s}$ die Ungleichungen

$$f_s^1 \leqq f \leqq f_s^2;\ f - f_s^1 < \frac{1}{s}, f_s^2 - f < \frac{1}{s}$$

befriedigen. Aus $\lim\limits_{s \to \infty} \int \Sigma f_s^i(Ag)\, d\omega = \int f(X)\, dX$ folgt das Resultat. Folglich gilt (4) auch für beliebige, nichtnegative Borel-meßbare Funktionen, wobei freilich ein Divergieren beider Seiten der Gleichung möglich ist.

Der Beweis wird genauer ausgeführt in der in 2) zitierten Arbeit, Seite 270—273.

2. Sei $\mathfrak{B}$ die Gruppe der $n \times n$-Matrizen B der Form

$$\begin{pmatrix} I & \tilde{B} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{B}$ Matrizen mit r Spalten, $n-r$ Zeilen sind. Unter $d\omega_B$ verstehen wir das durch die Metrik $ds^2 = \sigma(dB'\, dB) = \sigma(d\tilde{B}'\, d\tilde{B})$ definierte euklidische Volumelement in $\mathfrak{B}$. Sicherlich ist $d\omega_B$ rechts- und links-invariant gegen Transformationen aus $\mathfrak{B}$. Ferner sei $\mathfrak{V}$ die Untergruppe der unimodularen Transformationen V in $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{V}$ besteht daher aus allen B mit ganzzahligen Elementen. Der Bereich der Matrizen B aus $\mathfrak{B}$

mit $0 \leqq \tilde{b}_{ij} < 1$ $(i = 1, 2, \ldots n - r; j = 1, 2, \ldots, r)$ ist ein beschränkter Fundamentalbereich in $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{V}$. Wir bezeichnen diesen Bereich mit $F(\mathfrak{B}/\mathfrak{V})$. Es gilt

$$\int_{F(\mathfrak{B}/\mathfrak{V})} d\omega_B = 1.$$

Ist $f(X) \geqq 0$ Borel-meßbar im R_n, dann gilt weiter

Lemma 1.

$$\int_{F(\mathfrak{B}/\mathfrak{V})} \sum_{g} f(B(g_1, \ldots, g_{n-r}, h_{n-r+1}, \ldots, h_n))\, d\omega_B =$$
$$= \int \ldots \int f(x_1, \ldots, x_{n-r}, h_{n-r+1}, \ldots, h_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-r}.$$

Hier variiert $g = (g_1, \ldots, g_{n-r})$ *über alle ganzzahligen* $(n - r)$*-tupel.* $h = (h_{n-r+1}, \ldots, h_n)$ *ist ganzzahlig,* $\neq (0, \ldots, 0)$ *und fest.* Lemma 1 folgt aus

$$B(g_1, \ldots, g_{n-r}, h_{n-r+1}, \ldots, h_n) = (g_1 + (\tilde{B}h)_1, \ldots, g_{n-r} + (\tilde{B}h)_{n-r}, h_{n-r+1}, \ldots, h_n)$$

und den einfachsten Eigenschaften der Integrale. Es gilt daher weiter

Lemma 2.

$$\int_{F(\mathfrak{B}/\mathfrak{B})} \sum_{\substack{g \\ h \neq 0}} f(B(g_1, \ldots, g_{n-r}, h_{n-r+1}, \ldots, h_n))\, d\omega_B =$$
$$\sum_{h \neq 0} \int \ldots \int f(x_1, \ldots, x_{n-r}, h_{n-r+1}, \ldots, h_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-r}.$$

Im folgenden sei $r > 1$. Unter $\mathfrak{C}$ verstehen wir die Gruppe der $n \times n$-Matrizen C der Gestalt

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & \tilde{C} \end{pmatrix},$$

mit $\tilde{C} \in \mathfrak{A}_r$, wobei $\mathfrak{A}_r$ die Gruppe $\mathfrak{A}$ im Raum von r Dimensionen bedeutet. Sei $\mathfrak{W}$ die Untergruppe der Matrizen W der Form

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & \tilde{W} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{W} \in \mathfrak{U}_r$. Wir erklären das Volumelement $d\omega_c$ als das Volumelement $d\omega$ über $\tilde{C}$ im Raum $\mathfrak{A}_r$. Verstehen wir unter $F(\mathfrak{C}/\mathfrak{W})$ den Bereich der $C \in \mathfrak{C}$, deren $\tilde{C} \in F(\mathfrak{A}_r/\mathfrak{U}_r)$, dann ist $F(\mathfrak{C}/\mathfrak{W})$ ein beschränkter Fundamentalbereich für $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{C}$. Es ist weiter

$$\int_{F(\mathfrak{C}/\mathfrak{W})} d\omega_c = 1,$$

und $d\omega_c$ ist invariant. Schließlich ist nach (4) (wir wenden die Formel für r Dimensionen an)

$$\int\limits_{F(\mathfrak{C}/\mathfrak{B})} \sum_{h \neq 0} \left(\int \dots \int f(C(x_1, \dots, x_{n-r}, h_{n-r+1}, \dots, h_n))\, dx_1 \dots dx_{n-r} \right) d\omega_c = \\ = \int f(X)\, dX, \qquad (5)$$

wobei $h = (h_{n-r+1}, \dots, h_n)$.

Nun sei noch $\mathfrak{D} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}$ der Raum der Matrizen $D = CB$, $C \in \mathfrak{C}$, $B \in \mathfrak{B}$. $\mathfrak{D}$ besteht aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} I & \tilde{B} \\ O & \tilde{C} \end{pmatrix}.$$

Ähnlich erklären wir $\mathfrak{Z} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$. Unter ω_D verstehen wir das Produktmaß von ω_B in $\mathfrak{B}$ und ω_c in $\mathfrak{C}$. $d\omega_D$ ist invariant gegen Transformationen aus $\mathfrak{D}$. Endlich ist der Bereich $F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})$, bestehend aus allen Matrizen CB, $C \in F(\mathfrak{C}/\mathfrak{W})$, $B \in F(\mathfrak{B}/\mathfrak{V})$, ein Fundamentalbereich in $\mathfrak{D}$ für die Darstellung $D \to DZ$ der Gruppe $\mathfrak{Z}$ und es ist

$$\int\limits_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} d\omega_D = 1. \qquad (6)$$

Bezeichnen wir mit E_r die von den $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$-Achsen aufgespannte Ebene, dann ist nach Lemma 2 und (5)

$$\int\limits_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g \notin E} f(Dg) d\omega_D = \int\limits_{F(\mathfrak{C}/\mathfrak{W})} \int\limits_{F(\mathfrak{B}/\mathfrak{V})} \sum_{g} \sum_{h \neq 0} f(CB(g_1, \dots, g_{n-r}, h_{n-r+1}, \dots, h_n)) d\omega_B d\omega_c =$$

$$= \int\limits_{F(\mathfrak{C}/\mathfrak{W})} \sum_{h \neq 0} \left(\int \dots \int f(C(x_1, \dots, x_{n-r}, h_{n-r+1}, \dots, h_n))\, dx_1 \dots dx_{n-r} \right) d\omega_c = \\ = \int f(X)\, dX.$$

Foglich gilt

Satz 1.

$$\int\limits_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g \notin E} f(Dg)\, d\omega_D = \int f(X)\, dX. \qquad (7)$$

Man gewinnt aus (6) und (7) folgende Vertiefung des Deformationssatzes: es gibt eine Matrix M mit Determinante 1 der Gestalt

$$\begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & t & \dots & 0 & p_{21} & p_{22} \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & t & p_{n-2\,1} & p_{n-2\,2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{n-1\,1} & p_{n-1\,2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{n\,1} & p_{n\,2} \end{pmatrix},$$

welche

$$\sum_{g \neq 0} f(Mg) \leqq \int f(X)\, dX$$

leistet, wenn f wieder beschränkt, Borel-integrierbar und $f(X) = 0$ für $|X| \geqq K$ ist.

Um dies einzusehen, bilden wir die Matrix

$$M_t = \begin{pmatrix} tI & 0 \\ 0 & t^{-\frac{n-2}{2}} I \end{pmatrix},$$

welche aus den Vielfachen einer $(n-2) \times (n-2)$- und einer 2×2-Einheitsmatrix zusammengesetzt ist. Ist t hinreichend groß, dann ist

$$\sum_{\substack{g \in E_2 \\ g \neq 0}} f(M_t g) = 0.$$

Weiter ist nach Satz 1, Fall $r = 2$,

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g \notin E_2} f(M_t D g)\, d\omega_D = \int f(M_t X)\, dX = \int f(X)\, dX.$$

Es gibt folglich ein $D \in \mathfrak{D}$, so daß

$$\sum_{g \neq 0} f(M_t D g) = \sum_{g \notin E_2} f(M_t D g) + \sum_{\substack{g \in E_2 \\ g \neq 0}} f(M_t D g) \leqq$$

$$\leqq \int f(X)\, dX + \sum_{\substack{g \in E_2 \\ g \neq 0}} f(M_t g) = \int f(X)\, dX.$$

Somit ist $M_t D$ die gesuchte Matrix.

3. Wir sind nun in der Lage, eine leichte Verallgemeinerung von (3) zu beweisen.

Satz 2.

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_1, \ldots, g_m \in H^r_m} f(Dg_1, \ldots, Dg_m)\, d\omega_D = \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_m)\, dX_1 \ldots dX_m \quad (8)$$

wenn $r > m$. Dabei ist H^r_m die Menge jener $(g_1, \ldots, g_m)$, deren Normalprojektionen auf die $x_{n-r+1}, \ldots, x_n$-Ebene linear unabhängig sind.

Für $r = n$ erhält man Formel (3), für $m = 1$ Satz 1.

Beweis von Satz 2. Zunächst bemerken wir

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_1, \ldots, g_m \in H^r_m} f(Dg_1, \ldots, Dg_m)\, d\omega_D =$$

$$= \sum_{g_1, \ldots, g_{m-1} \in H^r_{m-1}} \int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{\substack{g_m \\ g_1, \ldots, g_m \in H^r_m}} f(Dg_1, \ldots, Dg_m)\, d\omega_D, \quad (9)$$

da $f(X) \geqq 0$.

Es gibt bei vorgegebenem $g_1, \ldots, g_{m-1} \in H^r_{m-1}$ eine unitäre Matrix $W(g_1, g_2, \ldots, g_{m-1}) \in \mathfrak{W} \in \mathfrak{D}_r$, welche die Punkte $g_1, \ldots, g_{m-1}$ in die

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-r+m-1}$-Ebene transformiert. Die Projektionen von Wg_1, $Wg_2, \ldots, Wg_{m-1}$ auf die $x_{n-r+1}, \ldots, x_{n-r+m-1}$-Ebene sind linear unabhängig. Variiert g_m über alle Punkte, für die $(g_1, \ldots, g_m) \in H_m^r$, so variiert Wg_m über alle Punkte, für die $(Wg_1, \ldots, Wg_m) \in H_m^r$, also jene Punkte, deren Projektionen auf die $x_{n-r+m}, \ldots, x_n$-Ebene nicht null sind. Daher $Wg_m \notin E = E_{r+1-m}$, wobei E_{r+1-m} die von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-(r+1-m)}$ aufgespannte Ebene ist. Da weiter $d\omega_D$ invariant ist, hat man

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{\substack{g_m \\ g_1 \ldots, g_m \in H_m^r}} f(Dg_1, \ldots, Dg_m)\, d\omega_D = \int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{\substack{g_m \\ g_1, \ldots, g_m \in H_m^r}} f(DWg_1, \ldots, DWg_m)\, d\omega_D =$$

$$= \int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_m \notin E} f(DWg_1, \ldots, DWg_{m-1}, Dg_m)\, d\omega_D =$$

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_m \notin E} f(D\bar{D}Wg_1, \ldots, D\bar{D}Wg_{m-1}, D\bar{D}g_m)\, d\omega_D,$$

wobei $\bar{D}$ eine beliebige Matrix aus $\mathfrak{D}_{r+1-m}$ ist. Der Ausdruck ist daher weiter gleich

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_m \notin E} f(DWg_1, \ldots DWg_{m-1}, D\bar{D}g_m)\, d\omega_D =$$

$$= \int_{F_{r+1-m}(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \left[\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_m \notin E} f(DWg_1, \ldots, DWg_{m-1}, D\bar{D}g_m)\, d\omega_D \right] d\omega_{D_{r+1-m}}$$

wegen (6). Nun vertauschen wir die Reihenfolge der Integrale und erhalten

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \left[\int_{F_{r+1-m}(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_m \notin E} f(DWg_1, \ldots, DWg_{m-1}, D\bar{D}g_m)\, d\omega_{D_{r+1-m}} \right] d\omega_D =$$

$$= \int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \left[\int f(DWg_1, \ldots, DWg_{m-1}, DX_m)\, dX_m \right] d\omega_D =$$

$$= \int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \ldots \int f(Dg_1, \ldots, Dg_{m-1}, X_m)\, dX_m\, d\omega_D.$$

Wegen (9) ist folglich

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_1, \ldots, g_m \in H_m^r} f(Dg_1, \ldots, Dg_m)\, d\omega_D =$$

$$= \int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g_1, \ldots, g_{m-1} \in H_{m-1}^r} \int f(Dg_1, \ldots, Dg_{m-1}, X_m)\, dX_m\, d\omega_D. \quad (10)$$

Durch wiederholte Anwendung von (10) erhält man Satz 2. Es ist zu bemerken, daß Satz 2 auch durch geradlinige Verallgemeinerung der Methode von *Siegel* erhalten werden kann.

4. Wir geben in diesem Abschnitt einen neuen Beweis für den folgenden von *Rogers* bewiesenen

Satz 3. Ist $k < n$, dann gilt

$$\int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{g_1 \ldots, g_k} f(Ag_1, \ldots, Ag_k)\, d\omega = f(0, 0, \ldots, 0) +$$

$$+ \sum_{(\nu,\mu)} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{G} \left(\frac{N(G,q)}{q^m}\right)^n \int \ldots \int f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{g_{i1}}{q} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \frac{g_{ik}}{q} X_i\right) dX_1 \ldots$$

$$\ldots dX_m + \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_k)\, dX_1 \ldots dX_k \qquad (11)$$

wobei beide Seiten der Gleichung möglicherweise den Wert $+\infty$ annehmen. Auf der linken Seite ist die Summe über alle k-tupel $g_1, g_2, \ldots, g_k$ zu bilden. Die äußere Summe rechts ist über alle Einteilungen $(\nu;\mu)=(\nu_1, \ldots, \nu_m;\mu_1, \ldots, \mu_{k-m})$ der Zahlen $1, 2, \ldots, k$ in zwei Folgen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ und $\mu_1, \ldots, \mu_{k-m}$ mit $1 \leqq m \leqq k-1$ und

$$1 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \ldots \quad < \nu_m \quad \leqq k$$

$$1 \leqq \mu_1 < \mu_2 < \ldots \quad < \mu_{k-m} \leqq k$$

$$\nu_i \neq \mu_j \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, k-m.$$

Die innere Summe ist über alle $m \times k$-Matrizen G mit ganzzahligen Elementen zu erstrecken, deren größter gemeinsamer Teiler relativ prim zu q ist, sowie mit

$$g_{i\nu_j} = q\,\delta_{ij} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m;\quad j = 1, \ldots, m.$$

$$g_{i\mu_j} = 0 \text{ für } \mu_j < \nu_i, \quad i = 1, \ldots, m;\quad j = 1, \ldots, k-m.$$

Schließlich ist $N(G, q)$ die Zahl der m-tupel ganzer Zahlen $(l_1, \ldots, l_m)$, welche

$$0 \leqq l_i < q \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} g_{ij}\, l_i \equiv 0 \pmod{q}$$

erfüllen.

Man kann übrigens zeigen[3], daß beide Seiten in (11) konvergieren, wenn f beschränkt ist und außerhalb eines beschränkten Bereiches verschwindet.

Rogers bewies das folgende

Lemma 3[4].

$$\sum_{g_1, \ldots, g_k} f(g_1, \ldots, g_k) = f(0, \ldots, 0) +$$

$$+ \sum_{(\nu,\mu)} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{G} \sum_{g_1, \ldots, g_m \in S_{G,q}} f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{g_{i1}}{q} g_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \frac{g_{ik}}{q} g_i\right) + \sum_{g_1, \ldots, g_k \in H_k} f(g_1, \ldots, g_k).$$

[3] *W. Schmidt*, erscheint demnächst im Canadian Journal of Math.

[4] Siehe 2, Formel (36) und (37).

Dabei ist über dieselben G zu summieren wie in Satz 3 und $S_{G,q}$ ist die Menge jener linear unabhängiger m-tupel $g_1, \ldots, g_m$, für welche die Zahlen $\sum_{i=1}^{m} \frac{g_{ij}}{q} g_i$ *ganz sind.*

Satz 3 ist daher bewiesen, wenn es uns gelingt, das folgende Lemma zu zeigen:

Lemma 4.

$$\int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{g_1,\ldots,g_m \in S_{G,q}} f(Ag_1, \ldots, Ag_m)\, d\omega =$$

$$= \left(\frac{N(G,q)}{q^m}\right)^n \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_m)\, dX_1 \ldots dX_m.$$

Der Beweis hierfür ist einfach; die Punkte $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ im R_m mit ganzzahligen Koordinaten und $\sum_{i=1}^{m} \frac{g_{ij}}{q} y_i \equiv 0 \pmod 1$ bilden ein Gitter Λ mit Determinante $q^m/N(G,q)$. Es gibt daher eine $m \times m$-Matrix Q mit $|Q| = q^m/N(G,q)$, so daß Λ aus allen Punkten Qg besteht, wobei g ganze Koordinaten hat. Folglich ist

$$\sum_{g_1,\ldots,g_m \in S_{G,q}} f(g_1, \ldots, g_m) = \sum_{g_1,\ldots,g_m \in H_m} f\Big(\sum_{i=1}^{m} q_{1i} g_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} q_{mi} g_i\Big).$$

Setzen wir $f(\sum_{i=1}^{m} q_{1i} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} q_{mi} X_i) = e(X_1, \ldots, X_m)$, dann ist

$$\int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{g_1,\ldots,g_m \in S_{G,q}} f(Ag_1, \ldots Ag_m)\, d\omega = \int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{g_1,\ldots,g_m \in H_m} e(Ag_1, \ldots, Ag_m)\, d\omega =$$

$$= \int \ldots \int e(X_1, \ldots, X_m)\, dX_1 \ldots dX_m = \left(\frac{N(G,q)}{q^m}\right)^n \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_m)$$

$dX_1 \ldots dX_m$.

Dies beweist Lemma 4 und Satz 3.

Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel

Von

Walter Wunderlich, Wien

Mit 15 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. März 1957)

1. Problemstellung

Unter der „*Hundekurve*" versteht man im engeren Sinn die Bahn eines sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Verfolgers, der einem gleichförmig-geradlinig fortschreitenden Ziel in der Weise nacheilt, daß seine Bewegungsrichtung ständig auf den jeweiligen Standort des Ziels weist. Sieht man von dem trivialen Fall ab, daß sich der Verfolger von vornherein auf der Zielbahn befindet (die er dann nicht mehr verlassen würde), so wird sich seine Bewegungsrichtung fortwährend ändern und er wird einen gekrümmten Weg zurücklegen, der in einer Ebene liegt und dessen Gestalt wesentlich vom Geschwindigkeitsverhältnis abhängt. Die Ermittlung der auftretenden Bahnkurven führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, welche sich unschwer elementar integrieren läßt.

Diese auf *Bouguer* (1732), vielleicht sogar auf *L. da Vinci* zurückgehende Aufgabe wurde wiederholt in mannigfachen Einkleidungen behandelt, so daß die Hundekurve auch unter anderen Namen, wie Hasenlinie, Verfolgungskurve, Ansteuerungslinie usw. anzutreffen ist[1]. Die alte Aufgabe gewann nun in jüngerer Zeit neue und besondere Bedeutung durch die Entwicklung sogenannter zielsuchender Geschosse

[1] *Bouguer*: Sur de nouvelles courbes auxquelles on peut donner le nom de lignes de poursuite. Mém. math. phys. Ac. Sci. Paris, 1732, 1—14. *De Maupertuis:* Sur les courbes de poursuite. Ebenda, 15—16. — Zusammenfassende Darstellung bei *G. Loria - F. Schütte*: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (Leipzig/Berlin 1911), Bd. II, 241—247. Vgl. ferner *V. Lalan*: Contribution à l'étude de la courbe de poursuite. Comptes rendus 192 (1931), 466—469.

(z. B. Geräuschtorpedos und Radarraketen) und erfuhr in diesem Zusammenhang verschiedene *Verallgemeinerungen*, von welchen vor allem jene auch geometrisch interessant ist, die verlangt, daß die *Bewegungsrichtung des Verfolgers von der Peilrichtung zum Ziel ständig um einen vorgeschriebenen, festen Winkel σ abweiche*, der kurz „*Schielwinkel*" genannt wird. Dieses Verfolgungsproblem — das für $\sigma = 0$ auf die gewöhnlichen Hundekurven führt — ist im Auftrage der deutschen Marine von *R. Hosemann* bearbeitet worden[2].

Diese verallgemeinerten Hundekurven bilden auch den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung, deren Ergebnisse bereits 1944 vorlagen, bisher jedoch noch nicht veröffentlicht worden sind. Besonderer Wert wird der verwendeten *geometrischen Methode* beigemessen, die gegenüber dem ziemlich undurchsichtigen analytischen Lösungsweg eine bemerkenswert übersichtliche Behandlung des Problems gestattet und neue Zusammenhänge aufdeckt. Sie bedient sich eines *räumlichen Weg-Zeit-Diagramms* des ebenen Bewegungsvorgangs, gewissermaßen eines „Räumlichen Fahrplans": In sinngemäßer Übertragung der bekannten „Graphischen Fahrpläne" für eindimensionale Bewegungsvorgänge wird nämlich das Geschehen in der (waagrecht gedachten) Ebene dadurch auf den dreidimensionalen Punktraum abgebildet, daß man die Zeit als dritte Koordinate senkrecht zu dieser Grundebene aufträgt. Die Bewegung eines Punktes in der Grundebene wird dann durch eine räumliche „*Schicksalslinie*" beschrieben, deren Grundriß mit der Bahn des Punktes zusammenfällt und deren Anstieg zur Geschwindigkeit umgekehrt proportional ist. Der Verfasser hat diese Methode schon früher für ähnliche Zwecke mit Erfolg eingesetzt[3] und gelegentlich insbesondere auch auf ihre Verwendbarkeit im Bereich der geometrischen Optik hingewiesen[4].

---

[2] *R. Hosemann*: Verfolgungskurven. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946, Bd. 3/I, 269—307.

[3] *W. Wunderlich*: Über fünf Aufgaben der Seetaktik. Z. math. natw. Unterr. 72 (1941), 97—102.

[4] *W. Wunderlich*: Dreidimensionale graphische Fahrpläne. Vortrag, gehalten am 26. 9. 1950 anläßlich der Tagung für mathematischen Unterricht in Graz (Nachr. Österr. Math. Ges. Nr. 13, S. 5). — Den Einsatz derartiger Raumdiagramme in der Optik empfiehlt auch *A. Reuschel*: Über ein dreidimensionales Verfahren zur Behandlung optischer Probleme. Optik 10 (1953), 470—475. Eine einfache Konstruktion und Berechnung der Schmidtschen Korrektionslinse mit Hilfe einer räumlichen Abbildung. Vortrag, gehalten am 21. 9. 1956 anläßlich des IV. Österr. Mathematikerkongresses in Wien (Nachr. Österr. Math. Ges. Nr. 47/48, S. 83).

Bei der vorliegenden Verfolgungsaufgabe ist die Schicksalslinie des gleichförmig-geradlinig fortschreitenden Ziels eine *Gerade*, während die Schicksalslinie des ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit nacheilenden Verfolgers eine gewisse *Böschungslinie* (Kurve konstanter Steigung) sein wird, von der sich zeigen läßt, daß sie auf einem bestimmten *Kegel oder Zylinder 2. Grades* verläuft und als Bahnkurve einer eingliedrigen Gruppe von Affinitäten angesehen werden kann, welche den Kegel bzw. Zylinder in sich transformieren: *Die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel erweisen sich damit als Parallelprojektionen spezieller räumlicher W-Kurven.* — Die angedeutete Behandlungsweise läßt sich konstruktiv und rechnerisch durchführen. Sie gestattet eine befriedigende und aufschlußreiche Beantwortung aller einschlägigen Fragen und liefert insonderheit eine übersichtliche Klassifikation der recht formenreichen Familie der verallgemeinerten Hundekurven und jeweils eine angemessene Parameterdarstellung.

2. Räumliches Fahrplandiagramm

Zunächst sei nochmals, unter Festlegung gewisser Bezeichnungen, das vorliegende Verfolgungsproblem ausführlich in geometrischer Fassung formuliert (vgl. Abb. 1):

„Ein punktförmiges Ziel Q' wandert von der Ausgangsposition Q_0 aus mit konstanter Geschwindigkeit v_Q entlang einer Geraden l' der Grundebene π. Ein punktförmiger Verfolger P' mit der Ausgangsposition P_0 eilt in π dem Ziel mit ebenfalls konstanter Geschwindigkeit v_P nach, derart, daß seine Bewegungsrichtung fortwährend mit der Peilrichtung $P'Q'$ einen festen Schielwinkel σ einschließt. Was für eine Bahn k' durchläuft der Verfolger, erreicht er sein Ziel, und wenn ja: wann, wo und unter welchem Winkel?"

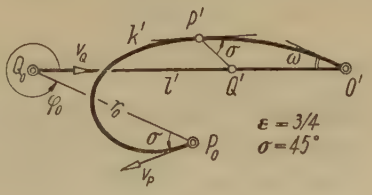

Abb. 1.

Wie angekündigt, entwickeln wir nun ein *räumliches Weg-Zeit-Diagramm* des Geschehens in der Ebene π, indem wir senkrecht über dem jeweiligen Standort X' eines beweglichen Punktes die seit dem Ausgangszustand verflossene Zeit τ in einem bestimmten Maßstab als Länge auftragen, wodurch wir zum Diagrammpunkt X gelangen, dessen Ortslinie das Schicksal des bewegten Punktes vollkommen beschreibt.

Um den Zeitmaßstab festzulegen, wollen wir vereinbaren, auf der Zeitachse die Längen $z = v_P . \tau$ aufzutragen. Als *Schicksalslinie des Verfolgers* P' wird dann eine unter 45° ansteigende *Böschungslinie* k auftreten, deren Bestimmung unsere Hauptaufgabe ist, während die *Schicksalslinie des Ziels* Q' eine von vornherein bekannte *Gerade* l ist, die durch ihren Grundriß l', ihren Spurpunkt Q_0 und ihre Steigung $\operatorname{tg} \nu = v_P / v_Q$ bestimmt ist. Die Schicksalslinie k legt, sobald sie ermittelt ist, den Ablauf der Verfolgung und durch ihren allfälligen Schnittpunkt mit der Schicksalsgeraden l des Ziels auch das Treffereignis örtlich und zeitlich vollständig fest.

Wir nehmen nun auf der Schicksalsgeraden l einen Punkt O zunächst beliebig an und betrachten an Hand von Abb. 2 die *Zentralprojektion* unseres Fahrplandiagramms aus O auf π (Kennzeichnung der Zentralrisse durch einen oberen Zeiger c); der „Distanzkreis" dieser Projektion, d. i. der Kreis mit dem Mittelpunkt O' und dem Radius $O'O$, sei mit d^c bezeichnet. Die zu gleichzeitigen Lagen von P' und Q' gehörigen Diagrammpunkte P und Q liegen in gleicher Höhe über π, führen daher auf eine zu PQ und $P'Q'$ parallele Bildstrecke P^cQ^c; da außerdem $Q^c = Q_0$, so gibt P^cQ_0 die *Peilrichtung* an. Fassen wir ferner die in P berührende, unter 45° ansteigende Tangente t der Schicksalslinie k ins Auge: Ihr Fernpunkt T hat seinen Zentralriß T^c auf dem Distanzkreis d^c und der Radius T^cO' ist parallel zur *Bewegungsrichtung* t', weicht also laut Voraussetzung von der Peilrichtung P^cQ_0 um den konstanten Schielwinkel σ ab.

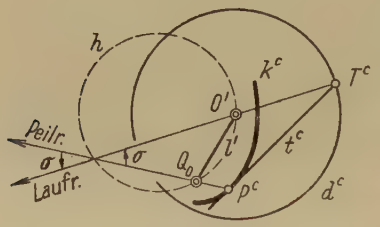

Abb. 2.

Auf diese Weise wird jedem Punkt P^c der Ebene eine gewisse Fortschreitung $t^c = P^cT^c$ zugeordnet, die durch die Angabe von Q_0, d^c und σ vollständig (wenn auch zweideutig) bestimmt ist. Der Zentralriß k^c der Schicksalslinie k ist eine Integralkurve des so erklärten Richtungsfeldes $\{P^c, t^c\}$ und das Verfolgungsproblem erscheint durch die Einführung des Zentralrisses im Prinzip zunächst auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung zurückgeführt.

Wir werden nun zeigen, daß erstens unter den Integralkurven des Richtungsfeldes $\{P^c, t^c\}$ als ausgezeichnete Lösung ein *Kegelschnitt* vorkommt, und daß es sich zweitens durch passende Wahl des Projektions-

zentrums O auf l stets so einrichten läßt, daß dieser Kegelschnitt just den Zentralriß k^c der gesuchten Verfolger-Schicksalslinie k darstellt.

3. Ein Hilfssatz über Kegelschnitte

Wir betrachten — unabhängig von den bisherigen Bezeichnungen — in der Ebene einen *Kegelschnitt* c, der einen *Kreis* c^* in zwei Punkten U, V berührt; der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten daselbst sei W. In einem beliebigen Punkt $X \neq U, V$ von c legen wir die Tangente und bezeichnen einen ihrer auf dem Kreis c^* liegenden Punkte mit X^* (Abb. 3).

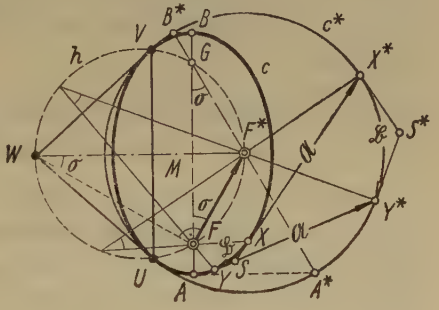

Abb. 3.

Sei nun $\mathfrak{A}$ jene *Kollineation*, die die Punkte U, V und W einzeln festläßt und X nach X^* bringt: Sie transformiert, wie leicht zu sehen ist, den Kegelschnitt c in den Kreis c^*, und wir behaupten, daß hierbei auch jeder weitere Punkt Y^* von c^* auf der Tangente seines entsprechenden Punktes Y liegt. Um dies einzusehen, ziehen wir jene zweite Kollineation $\mathfrak{B}$ heran, die gleichfalls die Punkte U, V und W unverändert läßt, aber X nach Y bringt: Sie transformiert c und daher auch c^* in sich. Auf Grund der Vertauschbarkeit von Kollineationen mit demselben Fixdreieck gilt für den auf der Tangente von Y liegenden Punkt $\mathfrak{B}.X^* = \mathfrak{B}\mathfrak{A}.X = \mathfrak{A}\mathfrak{B}.X = \mathfrak{A}.Y = Y^*$, womit die Behauptung erwiesen ist[5].

Dem Schnittpunkt S der Kegelschnittstangenten in X und Y entspricht vermöge $\mathfrak{A}$ der Schnittpunkt S^* der Kreistangenten in X^* und Y^*. Nehmen wir insbesondere für X^* und Y^* die absoluten Kreispunkte I^* und J^*, so fällt S^* in die Kreismitte F^* und S in den Schnitt zweier isotropen Kegelschnittstangenten, also in einen bestimmten Brennpunkt F von c. Dem *Brennstrahlbüschel* F von c ist also vermöge $\mathfrak{A}$

[5] Der Sachverhalt wird anschaulich besonders klar, wenn man sich die Fixpunkte U, V in die absoluten Kreispunkte verlegt denkt: c und c^* sind dann konzentrische Kreise und $\mathfrak{A}$ ist eine *Drehstreckung* um den gemeinsamen Mittelpunkt W.

das *Durchmesserbüschel* F^* von c^* zugeordnet, und zwar nicht bloß projektiv, sondern wegen der entsprechenden Minimalstrahlenpaare sogar *gleichsinnig-kongruent*. Mit anderen Worten heißt das, *die Strahlen* FX *und* F^*X^* *schließen einen festen Winkel* σ *ein*, wobei X, X^* ein beliebiges Punktepaar der Kollineation sein darf.

Der Ort der Winkelscheitel ist als Erzeugnis der gleichsinnig-kongruenten Büschel F und F^* ein gewisser *Kreis* h, der natürlich durch die Fixpunkte U, V und W geht, da dort entsprechende Punkte zusammenfallen; h enthält überdies die Büschelscheitel F, F^* und aus Symmetriegründen auch den zweiten Brennpunkt G. Fassen wir speziell diesen als Scheitel von σ auf, so erkennen wir, daß die Hauptachse des Kegelschnitts c gegen die Strecke FF^* um den Winkel σ abweicht (Abb. 3).

4. Die Hundekurven als Grundrisse spezieller Böschungslinien auf Kegeln oder Zylindern 2. Grades

Nunmehr haben wir den Anschluß an Abschn. 2 gewonnen: Die Figuren 2 und 3 lassen sich identifizieren, wenn wir Q_0 mit F, O' mit F^* und d^c mit c^* zusammenfallen lassen; der durch Angabe des Winkels σ festgelegte Kegelschnitt c wird sich dann mit dem Zentralriß k^c der Verfolger-Schicksalslinie decken, wenn er durch die Anfangsposition P_0 geht. Dies wird wohl bei willkürlicher Annahme von O auf l nicht zutreffen, doch läßt sich die Erfüllung dieser Anfangsbedingung durch eine geeignete zentrische Streckung von Q_0 aus stets erzwingen.

Zu einer direkten Konstruktion des Kegelschnitts k^c verhilft uns die Kenntnis seiner *numerischen Exzentrizität* ε. Man liest nämlich aus Abb. 3 und 2 ab:

$$\varepsilon = GM : MA = GF^* : F^*A^* = O'Q_0 : O'T^c = v_Q : v_P. \qquad (4.1)$$

Die numerische Exzentrizität ist also unmittelbar durch das *Geschwindigkeitsverhältnis* von Ziel zu Verfolger gegeben und k^c ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $v_Q \lessgtr v_P$.

Damit ergibt sich schließlich folgende Konstruktion von k^c aus $P_0, Q_0, l', v_Q : v_P = \varepsilon$ und σ (Abb. 4): Verdrehung der Zielgerade l' um Q_0 durch den Schielwinkel σ liefert die Hauptachsenrichtung von k^c. Senkrecht dazu verläuft die zum Brennpunkt Q_0 gehörige Leitlinie q, und zwar im Abstand P_0Q_0/ε von P_0. Nun ist der Kegelschnitt k^c als Ort aller Punkte, deren Abstände von Q_0 und q sich wie $\varepsilon : 1$ verhalten, festgelegt. Seine Nebenachse schneidet aus l' den Mittelpunkt O' des

Distanzkreises d^c aus, dessen Radius den Betrag $O'Q_0/\varepsilon$ hat[6]. — Die beiden Berührungspunkte von k^c und d^c seien hinfort sinngemäß mit U^c und V^c bezeichnet, der zugehörige Berührungspol mit W^c; letzterer wird auf der Nebenachse von dem zu l' normalen Brennstrahl ausgeschnitten, erstere liegen auf dem Kreis über dem Durchmesser $O'W^c$.

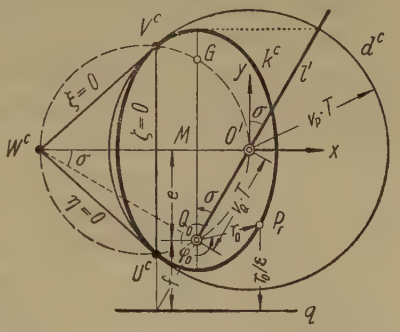

Abb. 4.

Diese Konstruktion artet allerdings für $\varepsilon = 1$ aus, weil O' und damit auch O, V^c und W^c Fernpunkte werden; dieser Sonderfall des „Nachläufers" wird in Abschnitt 12 behandelt. Auch für $\sigma = \pm 90^0$ rückt O ins Unendliche; diesem Grenzfall des „Querläufers" sind die Abschnitte 13—15 gewidmet.

Mit der Kenntnis des Projektionskegelschnittes k^c der gesuchten Verfolger-Schicksalslinie k steht uns nun für diese eine einfache *Trägerfläche* zur Verfügung, nämlich der projizierende *Kegel oder Zylinder 2. Grades* Γ mit der Spitze O und der Basis k^c. Das Hundekurvenproblem ist damit zurückgeführt auf die Ermittlung der *45⁰-Böschungslinien* der Fläche Γ, unter welchen die Schicksalslinie k als eine der beiden von P_0 ausgehenden zu finden ist.

Die Fernpunkte aller unter 45⁰ gegen die Grundebene π geneigten Geraden erfüllen einen gewissen Fernkegelschnitt d, der *„Böschungsfernkreis"* genannt werden soll. Im Falle eines eigentlichen Projektionszentrums O stellt der Distanzkreis d^c seinen Zentralriß dar, und auf Grund der Doppelberührung zwischen k^c und d^c in den Punkten U^c und V^c (Abb. 4) erkennen wir, daß der Böschungsfernkreis d den Trägerkegel Γ in zwei (uneigentlichen) Punkten U und V berührt; diese Berührung findet auch noch im Grenzfall eines Trägerzylinders Γ

[6] Die bei der Konstruktion der Leitlinie q eintretende Zweideutigkeit läßt sich auf Grund der durch die Aufgabenstellung bedingten Orientierung ausschalten. Beschränkt man sich etwa auf spitze Schielwinkel — was für eine wirkliche „Verfolgung" unerläßlich ist, aber auch geometrisch keine wesentliche Einschränkung bedeutet, da bloße Bewegungsumkehr den Schielwinkel um 180⁰ ändert —, so ist von den beiden Lösungen stets jene auszuwählen, bei welcher O' auf den dem positiven Bewegungsablauf entsprechenden Halbstrahl von l' zu liegen kommt.

(für $\varepsilon=1$ oder $\sigma=90^0$) statt. — Diese *Doppelberührung* wird uns die Ermittlung der benötigten Böschungslinien entscheidend erleichtern[7]. Bevor wir jedoch hierauf eingehen, wollen wir die bisherigen Hauptergebnisse zusammenfassend festhalten:

Satz 1. Die Hundekurve mit konstantem Schielwinkel ist der Grundriß einer Böschungslinie auf einem Kegel oder Zylinder 2. Grades, der den Böschungsfernkreis doppelt berührt und einen Basiskegelschnitt besitzt, dessen numerische Exzentrizität gleich dem Quotienten aus Ziel- und Verfolgergeschwindigkeit ist.

5. Die Verfolger-Schicksalslinien als spezielle W-Kurven (Bahnkurven eingliedriger Affinitätsgruppen)

Bezeichne jetzt Γ einen *eigentlichen* Trägerkegel 2. Grades, O seine Spitze, ω die Fernebene, c den ihr angehörenden (regulären) Fernkegelschnitt von Γ, d wieder den doppelt berührenden Böschungsfernkreis, U und V die Berührungspunkte und W den zugehörigen Berührungspol. Gesucht ist die durch einen bestimmten Oberflächenpunkt P_0 gehende *Böschungslinie* von Γ, also eine auf Γ verlaufende und P_0 enthaltende Kurve k, deren sämtliche Tangenten den Fernkreis d treffen. Wir wollen ausdrücklich voraussetzen, daß P_0 weder in ω noch auf einer der Erzeugenden OU und OV liege.

Wir wählen in einer genügend kleinen Umgebung von P_0 einen zweiten Oberflächenpunkt P_1, so zwar, daß die Gerade P_0P_1 den Fernkreis d treffe, und betrachten jene wohlbestimmte *Affinität* $\mathfrak{T}$, welche die Punkte O, U, V, W einzeln festläßt und P_0 nach P_1 bringt. Diese Affinität führt den Kegel Γ in sich über, ebenso dessen Fernkegelschnitt c und jeden weiteren, c in U und V berührenden, insbesondere also auch den Fernkreis d[8]. Durch wiederholte Anwendung der Transformation $\mathfrak{T}$ bzw. ihrer Umkehrung $\mathfrak{T}^{-1}$ gelangen wir von P_0 zu einer beiderseits unendlichen Punktfolge $\ldots P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \ldots$ auf Γ, die wir

[7] Die Ermittlung der Böschungslinien eines beliebigen Kegels 2. Grades läuft im allgemeinen — d. h. wenn er mit dem Böschungsfernkreis vier getrennte Punkte gemein hat — auf elliptische Integrale hinaus.

[8] Der Kegel Γ berührt zwei Seiten des Fixtetraeders längs der Kanten OU und OV und wird vermöge $\mathfrak{T}$ in einen gleichartigen Kegel übergeführt, der den P_0 entsprechenden Punkt P_1 enthält; der hiedurch eindeutig festgelegte Kegel ist daher mit Γ identisch. Die Invarianz der Fernebene ω bedingt die Invarianz von c und diese zieht die Invarianz von d nach sich, da d aus c durch eine invariante Zentralkollineation mit dem Zentrum W und der Achse UV abgeleitet werden kann.

durch Hinzunahme der Verbindungsstrecken aufeinanderfolgender Punkte zu einem *Polygon* $\mathfrak{k}$ ergänzen. Dieses Polygon ist unempfindlich gegenüber $\mathfrak{T}$ und natürlich auch gegenüber der von $\mathfrak{T}$ erzeugten *diskontinuierlichen Transformationsgruppe* $\mathfrak{T}^n$ (n ganz): Wir haben in $\mathfrak{k}$ *ein dem Kegel* Γ *eingeschriebenes, gegenüber der Gruppe invariantes Polygon, dessen Seiten sämtlich den Fernkreis* d *treffen.* Letzteres folgt aus der Invarianz von d und der besonderen Wahl von P_1.

Lassen wir nun unter Einhaltung aller Bedingungen P_1 gegen P_0 rücken, dann konvergiert nach S. Lie das invariante Polygon $\mathfrak{k}$ gegen eine auf der Kegeloberfläche verlaufende *Kurve* k, die gegenüber einer *kontinuierlichen Affinitätsgruppe* $\mathfrak{T}^n$ (n beliebig) unempfindlich ist und deren sämtliche Tangenten den Fernkreis d treffen[9]. So erhalten wir die gesuchte *Böschungslinie* k *als Bahnkurve einer eingliedrigen, kontinuierlichen Gruppe von automorphen Affinitäten des Kegels* Γ, also als spezielle „*W-Kurve*" im Sinne von *F. Klein*[10]. In Ergänzung zu Satz 1 gilt mithin der

Satz 2: Die Schicksalslinie eines auf einer Hundekurve mit konstantem Schielwinkel laufenden Verfolgers ist eine spezielle, auf einem Kegel oder Zylinder 2. Grades verlaufende W-Kurve, Bahnkurve einer kontinuierlichen eingliedrigen Gruppe von automorphen Affinitäten des Böschungsfernkreises. Im Falle eines dem Ziel an Geschwindigkeit überlegenen Verfolgers stellt die Kegelspitze den Schicksalspunkt des Treffereignisses dar.

Die zweite Hälfte des Satzes ist dadurch bedingt, daß für $v_P > v_Q$ ($\varepsilon < 1, \sigma \neq 90^0$) der Böschungsfernkreis d den Kegel Γ umschließt. In diesem Falle mündet die Böschungslinie k in der Kegelspitze O, wie eine nähere Untersuchung der Punktfolge $\{P_n\}$ lehrt. Da O auch auf l liegt, haben wir den Schicksalspunkt des Zusammentreffens von Verfolger und Ziel vor uns. — Für $v_P < v_Q$ verliert der Kegelscheitel O diese Bedeutung, da er der Schicksalslinie k nicht angehört (vgl. Abschn. 11).

---

[9] Vgl. *W. Wunderlich*: Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 155 (1947), 309—331, insb. Abschn. VI.

[10] Die vorliegenden Affinitäten führen den reellen Fernkreis d in sich über, können demnach als *Ähnlichkeiten bzw. Bewegungen einer pseudoeuklidischen Geometrie* aufgefaßt werden — „C-Geometrie" bei *E. Müller - J. Krames*: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. II „Die Zyklographie" (Leipzig/Wien 1929). In diesem Sinne wären dann die auftretenden W-Kurven als pseudoeuklidische Seitenstücke zu den zylindrokonischen Spiralen bzw. Schraublinien anzusehen.

Während die vom Verfolger beschriebene Hundekurve, wie eingangs gesagt, im Grundriß k' der Schicksalslinie k erhalten wird, stellt deren *Schrägriß* k^s in Richtung von l die *vom Ziel aus beobachtete Relativbahn* dar:

Satz 3. Die Relativbahn des auf einer Hundekurve mit konstantem Schielwinkel laufenden Verfolgers im Zielsystem ist die Parallelprojektion der W-Kurve aus Satz 2 in Richtung der Schicksalsgeraden des Ziels.

6. Isochronen

Denken wir uns die kontinuierliche Affinitätsgruppe $\mathfrak{A}^n$ auf sämtliche Punkte des in der Grundebene π liegenden Basiskegelschnitts k^c des Kegels Γ angewendet, so beschreibt jeder dieser Punkte eine auf Γ liegende W-Kurve von der Art der Bahn k von P_0. Da die Fortschreitrichtungen aller Punkte einer Kegelerzeugenden untereinander parallel sind[11], so handelt es sich durchwegs um Böschungslinien desselben Anstiegs. Diese ∞^1 Linien sind untereinander *ähnlich*, da sie durch die zentrischen Ähnlichkeiten von der Kegelspitze O aus untereinander vertauscht werden (wobei unter Umständen auch komplexe Ähnlichkeitsfaktoren zuzulassen sind); Gleiches gilt dann natürlich auch für ihre Parallelprojektionen.

Die ∞^1 in Rede stehenden W-Kurven stellen die Schicksalslinien von ∞^1 Verfolgern dar, die zu gleicher Zeit und unter gleichen Bedingungen von ihren Ausgangspositionen auf dem Kegelschnitt k^c aus die Verfolgung desselben Ziels aufnehmen. In jedem Augenblick erfüllen die zugehörigen Schicksalspunkte eine bestimmte *Schichtenlinie* des Trägerkegels Γ, also einen *zu k^c ähnlichen Kegelschnitt*. Die Grundrisse dieser Kegelschnitte sind die von *Hosemann* eingeführten „*Isochronen*"[2]. — Abb. 5 zeigt ein solches System von Isochronenellipsen samt der zugehörigen Ähnlichkeitsschar von Verfolgungskurven. Sämtliche Bahnabschnitte zwischen zwei Isochronen sind gleich lang. Weil $\varepsilon < 1$, so wird das Ziel erreicht, und zwar von allen Verfolgern gleichzeitig. Unter Beschränkung auf diesen Fall formulieren wir den

Satz 4: *Alle Verfolger mit gleicher Geschwindigkeit und gleichem Schielwinkel, die dasselbe* (*an Geschwindigkeit unterlegene*) *Ziel zu gleicher*

[11] Entsprechende Punktreihen auf zwei einander durch eine Affinität $\mathfrak{A}^n$ ($n \neq 0$) zugeordneten Kegelerzeugenden sind projektiv, wegen des selbstentsprechenden Punktes O in perspektiver Lage und wegen der entsprechenden Fernpunkte durch ein Parallelenbüschel aufeinander bezogen. Aus den parallelen Bahnsehnen werden dann mit $n \to 0$ in der Grenze parallele Bahntangenten für die Punkte einer Erzeugenden.

Zeit und am gleichen Ort treffen, befinden sich in jedem Augenblick auf einer gewissen Isochronenellipse, in deren einem Brennpunkt jeweils das Ziel steht.

Ferner gilt

Satz 5: *Alle Hundekurven mit gleichem Geschwindigkeitsverhältnis und gleichem Schielwinkel sind untereinander ähnlich, wobei allerdings unter Umständen komplexe Ähnlichkeitsfaktoren auftreten können.*

So sind beispielsweise in Abb. 5 die innerhalb des spitzen Winkels $U^c O' V^c$ verlaufenden Hundekurven untereinander reellähnlich, ebenso die außerhalb gelegenen, während innere und äußere Bahnen durch komplexe Ähnlichkeiten zusammenhängen.

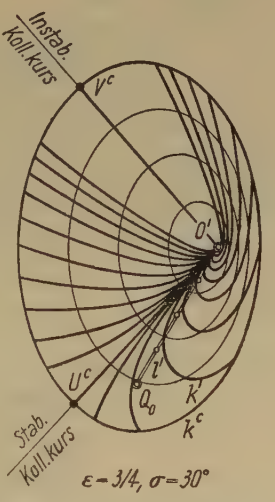

Abb. 5. Ähnlichkeitsschar von Hundekurven mit Isochronenkegelschnitten.

7. Klassifikation der Hundekurven mit konstantem Schielwinkel

Bei der Diskussion der möglichen Hundekurventypen können wir uns auf *spitze Schielwinkel*, also $|\sigma| \leqq 90^0$ beschränken; im Falle eines stumpfen Schielwinkels bewirkt nämlich gleichzeitige Umkehr des Bewegungssinnes bei Ziel und Verfolger eine Reduktion von σ um $\pm 180^0$, ohne an der Gestalt der Verfolgerbahn etwas zu ändern.

Ein erstes Einteilungsprinzip bietet zunächst das Geschwindigkeitsverhältnis $\varepsilon = v_Q : v_P > 0$, wobei der triviale Grenzfall $\varepsilon = 0$ von vornherein ausgeschaltet sei (bei ruhendem Ziel wäre die Verfolgerbahn eine *logarithmische Spirale* mit dem Schnittwinkel σ). Im übrigen empfiehlt sich noch die Absonderung der Hundekurven mit rechtem Schielwinkel, so daß vorläufig *vier Hauptkategorien* zu unterscheiden sind:

1. $\varepsilon < 1$, $|\sigma| < 90^0$: „*Treffer*". Der Verfolger erreicht das (unterlegene) Ziel im Endlichen. Die Isochronen sind Ellipsen.

2. $\varepsilon = 1$, $|\sigma| < 90^0$: „*Nachläufer*". Der Verfolger erreicht das (ebenbürtige) Ziel erst im Unendlichen. Die Isochronen sind Parabeln.

3. $\varepsilon = 1$, $|\sigma| < 90^0$: „*Flüchter*". Der Verfolger erreicht das (überlegene) Ziel nie, sondern entfernt sich von einem gewissen Zeitpunkt an immer mehr von ihm. Die Isochronen sind Hyperbeln.

4. $|\sigma| = 90^0$: „*Querläufer*". Der Verfolger läuft stets quer zur Peilrichtung, hat also keine Aussicht, das Ziel zu erreichen.

Ein zweites Einteilungsprinzip berücksichtigt die Realitätsverhältnisse der Berührungspunkte U, V von Trägerfläche Γ und Böschungsfernkreis d, die sich in der Doppelberührung zwischen dem Kegelschnitt k^c und dem Distanzkreis d^c widerspiegeln. Entscheidend ist nach Abb. 4 die Lage des Berührungspols W^c in bezug auf d^c, also der Betrag des Verhältniswertes

$$O'W^c : O'O = \frac{O'Q_0}{\sin\sigma} : O'O = \varepsilon : \sin\sigma.$$

Nach üblichem Sprachgebrauch wollen wir daher drei Unterfälle unterscheiden:

a) $|\sin\sigma| < \varepsilon$: „*Hyperbolischer Fall*". U und V sind reell-getrennt.

b) $|\sin\sigma| = \varepsilon$: „*Parabolischer Fall*". U und V sind zusammengerückt.

c) $|\sin\sigma| > \varepsilon$: „*Elliptischer Fall*". U und V sind konjugiert-imaginär.

Durch Kombination der beiden Einteilungsrichtlinien gelangen wir so zu *acht reellen Typen*:

1a) Hyperbolischer Treffer; Abschn. 8.

1b) Parabolischer Treffer; Abschn. 10.

1c) Elliptischer Treffer; Abschn. 9.

2a) Nachläufer (schlechtweg); Abschn. 12.

3a) Flüchter; Abschn. 11.

4a) Hyperbolischer Querläufer; Abschn. 14.

2b = 4b) Parabolischer Querläufer; Abschn. 15.

4c) Elliptischer Querläufer; Abschn. 13.

Diese Typen sollen nun anschließend in den genannten Abschnitten getrennt diskutiert werden, da sie unterschiedliche Behandlung verlangen.

Als Sonderklasse unter den hyperbolischen Hundekurven könnten noch die zu $\sigma = 0$ gehörigen „*gewöhnlichen Hundekurven*" (ohne Schielwinkel) hervorgehoben werden, obwohl sie sich nach allem von den Hundekurven mit Schielwinkel nicht grundsätzlich, sondern nur durch gewisse Vereinfachungen abheben (vgl. Abschn. 16).

Die gegebene Einteilung kann natürlich auch auf die Relativbahnen im Zielsystem ausgedehnt werden.

8. Hyperbolischer Treffer

Für den in der Anwendung zunächst wichtigsten Fall des *hyperbolischen Treffers* soll nun die rechnerische Auswertung der bestehenden geometrischen Sachlage ausführlich entwickelt werden. Wie setzen also $v_P > v_Q > 0$ und zusätzlich $0 \leqq \sin\sigma < \varepsilon = v_Q/v_P < 1$ voraus[12]. Die Anfangssituation werde durch die Zieldistanz $P_0 Q_0 = r_0 > 0$ und den Richtungswinkel $l' Q_0 P_0 = \varphi_0$ in bezug auf den Zielkurs l' festgelegt (Abb. 4).

Für die Isochronenellipse k^c, deren numerische Exzentrizität bekanntlich den Wert ε hat, finden wir an Hand von Abb. 4 zunächst als Abstand des Brennpunkts Q_0 von der zugehörigen Leitlinie q

$$f = \frac{r_0}{\varepsilon} - r_0 \,.\, \cos(\varphi_0 - \sigma), \tag{8.1}$$

und daraus ergibt sich die lineare Exzentrizität mit

$$e = \frac{\varepsilon^2 f}{1 - \varepsilon^2}. \tag{8.2}$$

Nun läßt sich aber sofort der Zielweg bis zum Zusammentreffen mit dem Verfolger in O' angeben und damit auch die entsprechende Treffzeit T. Aus

$$Q_0 O' = \frac{e}{\cos\sigma} = v_Q . T = \varepsilon\, v_P . T \tag{8.3}$$

folgt schließlich die wichtige *Treffzeitformel* von *Hosemann*:

$$T = \frac{r_0}{v_P} \cdot \frac{1 - \varepsilon\cos(\varphi_0 - \sigma)}{(1 - \varepsilon^2)\cos\sigma}, \text{ wobei } \varepsilon = v_Q/v_P. \tag{8.4}$$

Man sieht, daß sich unter den bestehenden Voraussetzungen stets eine endliche und positive Treffzeit einstellt.

Zwecks analytischer Darstellung der Verfolgerbahn machen wir jetzt den Schicksalspunkt O des Treffereignisses zum Ursprung eines *Normalkoordinatensystems*, dessen x- und y-Achse parallel zu den Achsenrichtungen der Ellipse k^c, also unter den Winkeln $90^0 - \sigma$ bzw. σ gegen l' verlaufen mögen (Abb. 4); die senkrecht zur Grundebene π angeordnete Applikate z ist nach Abschn. 2 proportional zur Zeit τ:

[12] Die Beschränkung auf positive und wie immer spitze Schielwinkel geschieht nur, um die Vorstellung zu fixieren; die gewonnenen Formeln behalten ihre Gültigkeit aber auch für andere Werte.

$$z = v_P \,.\, \tau. \tag{8.5}$$

Die Koordinaten x, y, z geben gleichzeitig homogene Koordinaten in der Fernebene ab.

Der *Böschungsfernkreis* d wird dann dargestellt durch

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \tag{8.6}$$

der Fernpunkt W durch

$$x_W : y_W : z_W = \varepsilon : 0 : \sin\sigma. \tag{8.7}$$

Die (reellen) Berührungspunkte U, V von d mit dem Kegel 2. Ordnung Γ bestimmen sich aus dem Berührungspol W zu

$$x_{U,V} : y_{U,V} : z_{U,V} = \sin\sigma : \pm w : \varepsilon \text{ mit } w = \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2\sigma}. \tag{8.8}$$

Den *Trägerkegel* Γ selbst können wir nun in dem von dem Drehkegel (8.6) und der doppelt zählenden Ebene $OUV(\varepsilon\, x - z \sin\sigma = 0)$ aufgespannten Kegelbüschel durch die Bedingung aussondern, daß die Schichtenellipsen $z = \text{const}$ die numerische Exzentrizität ε haben; wir erhalten so

$$(1 - \varepsilon^2)(x^2 + y^2 - z^2) + (\varepsilon\, x - z \sin\sigma)^2 = 0. \tag{8.9}$$

Schließlich notieren wir noch die Koordinaten des *Ausgangspunktes* P_0, in deren Angabe die Treffzeit T gemäß (8.4) eingeht:

$$\begin{aligned} x_0 &= -v_Q T \,.\, \sin\sigma + r_0 \,.\, \sin(\sigma - \varphi_0), \\ y_0 &= -v_Q T \,.\, \cos\sigma + r_0 \,.\, \cos(\sigma - \varphi_0), \\ z_0 &= -v_P\, T. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Im Hinblick auf die die gesuchte Verfolger-Schicksalslinie k aus P_0 erzeugende Affinitätsgruppe $\mathfrak{T}^n$ ist es zweckmäßig, deren Fixtetraeder $OUVW$ als Koordinatentetraeder zu verwenden, d. h. ein neues, *schiefwinkliges Koordinatensystem* ξ, η, ζ mit den Achsen OU, OV, OW einzuführen. Dies geschehe mittels der aus (8.8) und (8.7) fließenden Substitutionen

$$\begin{aligned} \xi &= x\sin\sigma - wy - \varepsilon z, & 2w^2 \,.\, x &= -(\xi + \eta)\sin\sigma + 2\varepsilon\zeta, \\ \eta &= x\sin\sigma + wy - \varepsilon z, & 2w^2 \,.\, y &= -w(\xi - \eta), \\ \zeta &= \varepsilon\, x \quad - z\sin\sigma; & 2w^2 \,.\, z &= -\varepsilon(\xi + \eta) + 2\,\zeta\sin\sigma. \end{aligned} \tag{8.11}$$

In den neuen Koordinaten schreibt sich jetzt der *Böschungsfernkreis* d

$$\xi\eta = \zeta^2 \tag{8.12}$$

und der *Trägerkegel* Γ

$$(1 - \varepsilon^2)\,\xi\eta = \zeta^2 \,.\, \cos^2\sigma. \tag{8.13}$$

Die neuen Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 von P_0 ergeben sich mittels (8.11) aus (8.10), sollen aber hier nicht eigens hingeschrieben werden.

Eine *Affinität* $\mathfrak{T}$, die das Tetraeder $OUVW$ eckenweise festläßt, kann nun angesetzt werden durch

$$\xi_1 = A \cdot \xi_0, \quad \eta_1 = B \cdot \eta_0, \quad \zeta_1 = C \cdot \zeta_0. \tag{8.14}$$

Bei wiederholter Anwendung von $\mathfrak{T}$ tritt die Zählgröße als Exponent von A, B, C auf, und die eingliedrige *kontinuierliche Gruppe* läßt sich daher mittels eines Parameters t darstellen durch

$$\xi = e^{\alpha t} \cdot \xi_0, \quad \eta = e^{\beta t} \cdot \eta_0, \quad \zeta = e^{\gamma t} \cdot \zeta_0. \tag{8.15}$$

Diese Gleichungen geben gleichzeitig bereits die vom Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) durchlaufene *Bahnkurve* der Gruppe in Parameterform an, wobei wir uns unter diesem Punkt gleich unseren Ausgangspunkt P_0 vorstellen wollen.

Die Forderung nach *Invarianz des Kegels* Γ oder des Böschungsfernkreises d zieht für die Exponenten die Bedingung

$$\alpha + \beta = 2\gamma \tag{8.16}$$

nach sich. Ferner müssen wir noch verlangen, daß die Tangenten der durch (8.15) dargestellten Bahnkurve den Fernkreis d treffen, d. h. daß die Zuwächse $d\xi = \alpha\xi\, dt$, $d\eta = \beta\eta\, dt$, $d\zeta = \gamma\zeta\, dt$ unter der Voraussetzung (8.13) gemäß (8.12) die Beziehung $d\xi\, d\eta = d\zeta^2$ erfüllen. Dies führt auf die zweite Bedingung

$$\frac{\alpha\beta}{1-\varepsilon^2} = \frac{\gamma^2}{\cos^2\sigma}. \tag{8.17}$$

Setzen wir etwa $\gamma = 1$, dann erhalten wir aus (8.16) und (8.17)

$$\alpha = 1 - n, \quad \beta = 1 + n \text{ mit } n = w/\cos\sigma < 1. \tag{8.18}$$

Die richtige Vorzeichenverteilung kann dabei auf Grund von Abb. 3 und 4 in der Weise überprüft werden, daß man sich überzeugt, daß die Kollineation $\mathfrak{A}$, welche in der (durch homogene Koordinaten beschriebenen) Bildebene den Zentralriß $P^c(\xi : \eta : \zeta)$ eines Punktes $P(\xi, \eta, \zeta)$, in den Tangentenfluchtpunkt $T^c(d\xi : d\eta : d\zeta = \alpha\xi : \beta\eta : \gamma\zeta)$ überführt, auch den Brennpunkt $Q_0(x : y : z = \varepsilon \sin\sigma : \varepsilon\cos\sigma : 1)$ in den Kreismittelpunkt $O'(x : y : z = 0 : 0 : 1)$ transformiert.

Nun wollen wir noch den bequemeren Parameter

$$\vartheta = e^t \tag{8.19}$$

einführen und haben dann für die *Verfolger-Schicksalslinie k* die elegante Darstellung

$$\xi = \xi_0 \cdot \vartheta^{1-n},\ \eta = \eta_0 \cdot \vartheta^{1+n},\ \zeta = \zeta_0 \cdot \vartheta, \tag{8.20}$$

wobei ξ_0, η_0, ζ_0 die schiefwinkligen Koordinaten des Ausgangspunktes P_0 bedeuten. Man braucht jetzt nur vermöge (8.11) zu den Normalkoordinaten x, y, z zurückzukehren, deren erste zwei die *Hundekurve k'* beschreiben, während die dritte zufolge (8.5) durch $\tau = z/v_P$ den *Zeitablauf* regelt; Ortskoordinaten und Zeit werden dabei vom Treffereignis aus gezählt. Der Parameter ϑ hat das Intervall $1 \geqq \vartheta \geqq 0$ zu durchlaufen: $\vartheta = 1$ liefert die Ausgangsposition $x = x_0$, $y = y_0$, $\tau = -T$; $\vartheta = 0$ das Zusammentreffen $x = y = \tau = 0$; $\vartheta > 1$ ergäbe die Rückwärtsverlängerung.

Die *relative Verfolgerbahn* k^s im Zielsystem — d. i. die Parallelprojektion von k in Richtung l — stellt sich analytisch folgendermaßen dar:

$$\bar{x} = x - \varepsilon z \cdot \sin\sigma,\ \bar{y} = y - \varepsilon z \cdot \cos\sigma. \tag{8.21}$$

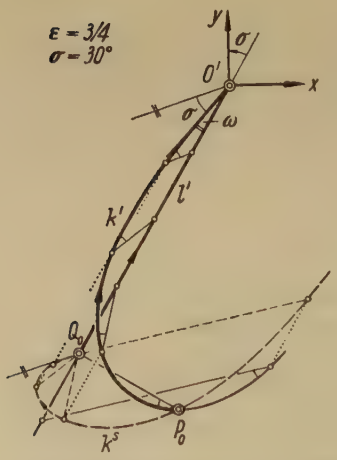

Abb. 6. Hyperbolischer Treffer.

Abb. 6 zeigt das Aussehen der absoluten und der relativen Verfolgerbahn im Falle des hyperbolischen Treffers. Q_0 stellt, wie leicht einzusehen, einen Brennpunkt von k^s dar.

Wie (8.20) lehrt, kommen unter den vorliegenden W-Kurven und damit auch unter den absoluten und relativen Hundekurven *algebraische Linien* vor, nämlich für rationale Werte von n (hier stets < 1). Schreibt man $n = \mu/\nu$ als gekürzten Bruch an, so gibt $\mu + \nu$ die *Ordnung* an. Der einfachste nichttriviale Fall liegt für $n = 1/2$ vor, der auf kubische Bahnkurven führt.

Besonders hervorzuheben sind die bei jedem n vorhandenen *geradlinigen Verfolgerbahnen*, die auftreten, wenn speziell $\zeta_0 = 0$ ist, was wegen (8.13) auch $\eta_0 = 0$ oder $\xi_0 = 0$ bedingt. Die zugehörigen Schicksalslinien fallen mit den invarianten Kegelerzeugenden OU bzw. OV zusammen. *Hosemann*[2] spricht im ersten Fall vom *„stabilen Kollisionskurs"*, im zweiten vom *„instabilen"*, was mit dem Verhalten der übrigen

(krummen) Verfolgerbahnen zusamenhängt: dieselben nähern sich nämlich in zunehmendem Maße dem stabilen Kollisionskurs und münden im Treffpunkt berührend in diesen ein, treffen mithin das Ziel allesamt von achtern und unter demselben Winkel ω; die einzige Ausnahme bildet der instabile Kollisionskurs, der das Ziel von vorn, und zwar unter dem Winkel $\omega + 2\sigma$ trifft (vgl. Abb. 5 u. 6). Dieses Verhalten ist aus den Gleichungen (8.20) für $\vartheta \to 0$ abzulesen. Der Wert des *Treffwinkels* ω ist auf Grund des Sinussatzes leicht aus

$$\sin(\omega + \sigma) : \sin\sigma = 1 : \varepsilon \tag{8.22}$$

zu berechnen. — Die beiden Kollisionskurse zerlegen die Ebene in zwei Sektoren (Abb. 5). Zwei im selben Sektor verlaufende Hundekurven sind jeweils reell-ähnlich, zwei Bahnen aus verschiedenen Sektoren hängen hingegen durch eine komplexe (zentrische) Ähnlichkeit zusammen, was aus dem analogen Verhalten der entsprechenden W-Kurven im Raumdiagramm folgt (vgl. Satz 5).

9. Elliptischer Treffer

In diesem durch $0 < \varepsilon = v_Q/v_P < \sin\sigma < 1$ gekennzeichneten Fall sind die Berührungspunkte U, V des Kegels Γ mit dem ihn umschließenden Böschungsfernkreis d konjugiert-imaginär, so daß die zugehörigen Böschungslinien k auf Γ der Kegelspitze O in Spiralenform zustreben. Diese Böschungslinien sind *affin* zu den wohlbekannten *zylindro-konischen Spiralen* (Bahnkurven räumlicher Ähnlichkeitsgruppen[13]), denn sie gehen in diese über, wenn man einen der im Büschel (c, d) enthaltenen nullteiligen Kegelschnitte durch eine geeignete Affinität in den absoluten Kugelkreis transformiert. *Die Verfolgerbahnen im Falle des elliptischen Treffers sind demnach „abnehmende Laufmusterkurven", die durch Parallelprojektion von zylindro-konischen Spiralen erhalten werden können.*

Während die relative Verfolgerbahn im Zielsystem stets die Gestalt einer mehr oder weniger verzerrten Spirale hat, können bei der Hundekurve im ruhenden System *drei Spielarten* unterschieden werden, je nachdem der Treffpunkt O' außerhalb, auf oder innerhalb der Isochronenellipsen liegt, was davon abhängt, ob $\varepsilon \gtreqless \cos\sigma$ ist. Im ersten Fall nähert sich der Verfolger in unendlich vielen, untereinander ähn-

[13] *W. Wunderlich*: Darstellende Geometrie der Spiralflächen. Monatsh. Math. Phys. 46 (1938), 248—265.

lichen Schleifen dem Treffpunkt von einer Seite her (Abb. 7) und verbleibt innerhalb eines von den Umrißerzeugenden des Kegels Γ begrenzten Winkelraums von der Größe 2γ, wobei $\varepsilon \sin\gamma = \cos\sigma$; im zweiten Fall geht die Hundekurve unendlich oft durch den späteren Treffpunkt O', wo die immer kleiner werdenden Schlingen einander berühren; im dritten Fall schließlich umkreist der Verfolger sein Ziel und den Treffpunkt in einer immer enger werdenden Spirale. In keinem Fall kann von einem bestimmten Treffwinkel gesprochen werden. Auch geradlinige Kollisionskurse sind reell nicht vorhanden. Demzufolge sind hier alle Hundekurven mit demselben Geschwindigkeitsverhältnis und demselben Schielwinkel untereinander reell-ähnlich.

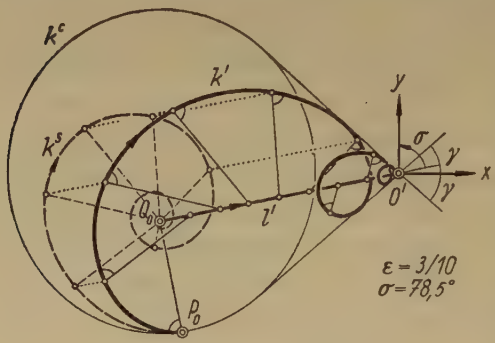

Abb. 7. Elliptischer Treffer.

Führt man die analytische Behandlung des elliptischen Treffers nach dem Muster des hyperbolischen durch, so fallen zunächst die dort in (8.8) und (8.18) eingeführten Hilfsgrößen w und n rein-imaginär aus. Um im Reellen zu bleiben, wird man daher unter Verwendung der Ersatzgröße $v = \sqrt{\sin^2\sigma - \varepsilon^2}$ zu passenden neuen Koordinaten X, Y, Z übergehen:

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}(\xi + \eta) = x\sin\sigma - \varepsilon z, & v^2 x &= X\sin\sigma - \varepsilon Z, \\ Y &= \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = -v\,y, & v^2 y &= -v\,Y, \\ Z &= \zeta = \varepsilon x - z\sin\sigma; & v^2 z &= \varepsilon X - Z\sin\sigma. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Unter Ausnutzung der *Euler*schen Identität folgt dann aus (8.15) und (8.18) für die Verfolger-Schicksalslinie k die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} X &= e^{-\theta/m}(X_0\cos\theta - Y_0\sin\theta) \\ Y &= e^{-\theta/m}(X_0\sin\theta + Y_0\cos\theta) \\ Z &= e^{-\theta/m}\cdot Z_0 \end{aligned} \qquad \text{mit } m = v/\cos\sigma, \tag{9.2}$$

wobei $-mt = \theta$ gesetzt wurde. Die hieraus mittels (9.1) ableitbare Darstellung in kartesischen Koordinaten gibt dann wieder durch x, y die Verfolgerbahn und durch $z = v_P \cdot \tau$ den zeitlichen Ablauf.

Eine Änderung des Parameterwinkels θ um 2π bewirkt eine die Kurve k in sich selbst transformierende zentrische Streckung im Verhältnis $e^{2\pi/m}$ vom Ursprung aus: Auch die Hundekurve k' gestattet daher solche automorphen Streckungen vom Treffpunkt aus, wie sie den „abnehmenden Laufmusterkurven" eigen sind.

Deutet man X, Y, Z selbst als Normalkoordinaten, so stellt (9.2) eine der oben erwähnten zylindro-konischen Spiralen dar, die zu k affin sind. Eine solche Spirale selbst tritt als Schicksalslinie bei ruhendem Ziel auf ($\varepsilon = 0$).

10. Parabolischer Treffer

Dieser durch $0 < \varepsilon = v_Q/v_P = \sin\sigma < 1$ gekennzeichnete Grenzfall zwischen hyperbolischem und elliptischem Treffer liegt vor, wenn die Berührungspunkte U, V von Γ und d zusammengerückt sind. Die beiden geradlinigen Kollisionskurse sind hier vereinigt und treffen den Zielkurs unter dem Winkel $\omega = 90^0 - \sigma$. Alle krummen Verfolgerbahnen mit demselben Schielwinkel (und Geschwindigkeitsverhältnis) sind untereinander reell-ähnlich.

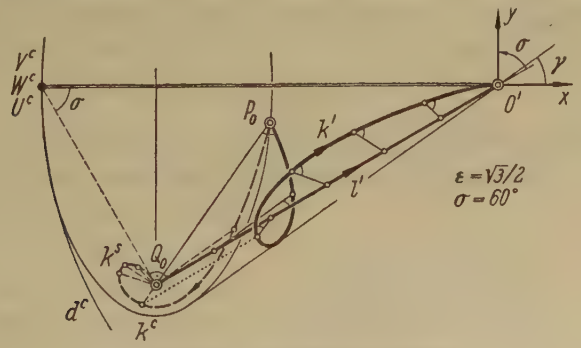

Abb. 8. Parabolischer Treffer.

Die analytische Behandlung erfordert eine gewisse Modifikation des bisherigen Musters, da das Fixtetraeder der Affinitätsgruppe $\mathfrak{T}^n$ ausgeartet ist. Geht man zunächst vermöge

$$\begin{aligned} X &= x + z, & x &= \tfrac{1}{2}(X - Z), \\ Y &= y, & y &= Y, \\ Z &= -x + z; & z &= \tfrac{1}{2}(X + Z) \end{aligned} \qquad (10.1)$$

zu neuen Koordinaten über, in welchen die invarianten Fernkegelschnitte durch

$$XZ - Y^2 + \lambda Z^2 = 0 \tag{10.2}$$

dargestellt werden, dann reduziert sich das eine infinitesimale Transformation der Gruppe definierende linear-homogene Gleichungssystem auf

$$\frac{dX}{dt} = X - 2cY, \quad \frac{dY}{dt} = Y - cZ, \quad \frac{dZ}{dt} = Z \text{ mit } c = \operatorname{tg}\sigma. \tag{10.3}$$

Integration dieses Systems liefert dann die W-Kurve k, die sich nach Übergang zum neuen Parameter

$$\vartheta = -ct \tag{10.4}$$

folgendermaßen schreibt:

$$\begin{aligned} X &= e^{-\vartheta/c}(X_0 + 2\vartheta Y_0 + \vartheta^2 Z_0), \\ Y &= e^{-\vartheta/c}(Y_0 + \vartheta Z_0), \\ Z &= e^{-\vartheta/c} \cdot Z_0; \end{aligned} \tag{10.5}$$

X_0, Y_0, Z_0 sind dabei die gemäß (10.1) zu berechnenden Neukoordinaten des Ausgangspunktes $P_0(\vartheta = 0)$. Von der Darstellung (10.5) der Verfolger-Schicksalslinie hat man dann vermöge (10.1) wieder zu den alten Koordinaten $x, y, z = v_P \tau$ zurückzukehren, welche den örtlichen und zeitlichen Ablauf der Verfolgung beschreiben, die mit $\vartheta = \infty$ ihr Ende findet.

11. Flüchter

Diese durch $\varepsilon = v_Q/v_P > 1$ gekennzeichnete Annahme führt auf *hyperbolische Isochronen* und weist stets ein reelles Fixtetraeder $OUVW$ auf, so daß hier Entwicklung und Formeln aus Abschn. 8 weitgehend übernommen werden können. Der ausschlaggebende Unterschied gegenüber dem hyperbolischen Treffer liegt lediglich darin, daß der Exponent $n = w/\cos\sigma$ jetzt stets größer als 1 ausfällt, was entscheidenden Einfluß auf den Verlauf der W-Kurven hat: Diese kommen jetzt wohl ebenfalls aus dem Fernpunkt $V(\vartheta = \infty)$, münden jedoch nicht in der Kegelspitze O, sondern im Fernpunkt $U(\vartheta = 0)$. Nähere Betrachtung zeigt, daß die Tangente

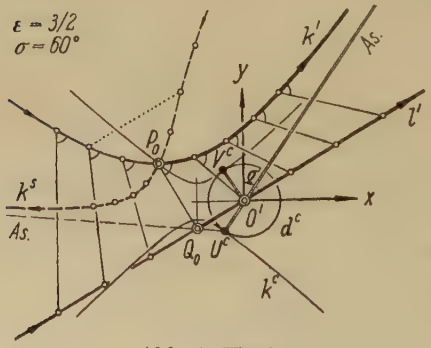

Abb. 9. Flüchter.

in V die Ferngerade VW ist, während in U die Tetraederkante UO berührt wird. Die Hundekurve „flüchtet" daher längs der Asymptote $O'U^c$ ins Unendliche hinaus, während ihre Rückwärtsverlängerung einen parabolischen Ast in Richtung $O'V^c$ entsendet (Abb. 9). Der Punkt O' wird vollkommen vermieden und spielt daher im allgemeinen nicht mehr die Rolle eines Treffpunkts, der, von einer einzigen Ausnahme abgesehen, gar nicht existiert. Die erwähnte Ausnahme bezieht sich auf den „labilen Kollisionskurs" $O'V^c$: In dem besonderen Fall, daß der Verfolger diese gerade Bahn durchläuft, kommt trotz unterlegener Geschwindigkeit ein Zusammentreffen (in O') zustande.

Für rationale Werte des Exponenten $n = \mu/\nu > 1$ treten wieder *algebraische Hundekurven* auf, und zwar von der Ordnung $2\,\mu$. Die niedrigste mögliche Ordnung ist mithin 4 (für $n = 2$).

12. Nachläufer

Wir können die durch $\sin\sigma < \varepsilon = 1$ gekennzeichnete Annahme als Grenzfall des hyperbolischen Treffers auffassen: Der Isochronenkegelschnitt k^c ist jetzt eine *Parabel*, die durch ihren Brennpunkt Q_0, den Punkt P_0 und die gegen l' um σ abweichende Achsenrichtung gegeben ist; ihr Parameter berechnet sich gemäß Abb. 10 mit

$$p = r_0[1 - \cos(\sigma - \varphi_0)]. \tag{12.1}$$

Das Projektionszentrum O ist in den Fernpunkt der Ziel-Schicksalsgerade l hinausgerückt, die Trägerfläche $\Gamma = Ok^c$ der Böschungslinie

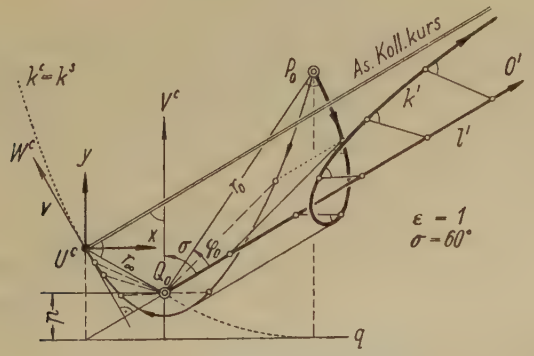

Abb. 10. Nachläufer.

k wird damit zu einem *parabolischen Zylinder* und der Distanzkreis d^c artet in die Ferngerade u und die zu l' normale Parabeltangente v aus.

Wir verschieben das bisher verwendete Koordinatensystem x, y, z mit seinem Ursprung in den Berührungspunkt U^c der Parabeltangente v (Abb. 10). Die Isochronenparabel k^c besitzt dann die Parameterdarstellung:

$$x = t,\ y = \frac{t^2}{2p} - t\ .\ \mathrm{tg}\,\sigma,\ z = 0, \tag{12.2}$$

und die Ausgangsposition P_0 hat die Koordinaten

$$x_0 = p\ \mathrm{tg}\,\sigma + r_0 \sin(\sigma - \varphi_0),\ y_0 = \frac{p}{2}(1 - \mathrm{tg}^2\,\sigma) + r_0 \cos(\sigma - \varphi_0),\ z_0 = 0. \tag{12.3}$$

Wir gehen nun zu einem der Aufgabe besser angepaßten, schiefwinkligen Koordinatensystem ξ, η, ζ über, indem wir die bereits bewährten Transformationsgleichungen (8.11) heranziehen, die jetzt mit $\varepsilon = 1$ und $w = \cos\sigma$ folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} \xi &= x\sin\sigma - y\cos\sigma - z, & 2\cos^2\sigma\ .\ x &= -(\xi + \eta)\sin\sigma + 2\zeta, \\ \eta &= x\sin\sigma + y\cos\sigma - z, & 2\cos^2\sigma\ .\ y &= -(\xi - \eta)\cos\sigma, \\ \zeta &= x \qquad\quad - z\sin\sigma; & 2\cos^2\sigma\ .\ z &= -(\xi + \eta) + 2\zeta\sin\sigma. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Die ξ-Achse gibt die Erzeugendenrichtung des Zylinders Γ an, dessen Gleichung daher nur die Veränderlichen η und ζ enthalten wird; sie ergibt sich aus (12.2) und (12.4) mit

$$2p\,\eta = \zeta^2\cos\sigma. \tag{12.5}$$

Die 45°-Böschungslinien auf Γ sind durch $dx^2 + dy^2 = dz^2$ oder

$$d\xi\ .\ d\eta = d\zeta^2 \tag{12.6}$$

gekennzeichnet, wobei die Erzeugenden als triviale Lösungen ausscheiden. Aus (12.5) und (12.6) findet man durch elementare Integration für die durch P_0 gehende Böschungslinie, also die *Verfolger-Schicksalslinie* k, die Darstellung

$$\xi = \xi_0 - \vartheta,\ \eta = \eta_0\, e^{-2\vartheta/c},\ \zeta = \zeta_0\, e^{-\vartheta/c} \text{ mit } c = p/\cos\sigma, \tag{12.7}$$

wobei die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 von P_0 aus (12.3) mittels (12.4) zu berechnen sind. Aus (12.7) erhält man dann gleichfalls mittels (12.4) die Ortskoordinaten x, y des Verfolgers und die von der Ausgangssituation aus gezählte Zeit $\tau = z/v_P$.

Die Nachläufer-Hundekurve ist demnach — abgesehen vom Sonderfall $\eta_0 = \zeta_0 = 0$ — stets transzendent. Sie kommt nach Art einer Parabel aus dem Unendlichen ($\vartheta = -\infty$) und läuft dann asymptotisch längs der durch U^c gehenden Parallelen zur Zielbahn l' wieder ins

Unendliche hinaus ($\vartheta = +\infty$); der Verfolger strebt dabei dem Ziel gegenüber in eine Grenzposition, die der Lage von U^c gegen Q_0 entspricht ($r_\infty = \lim Q' P' = Q_0 U^c = p/2 \cos^2 \sigma$, $\varphi_\infty = \pi - \sigma$).

Die relative Verfolgerbahn k^s im Zielsystem fällt mit der *Parabel* k^c zusammen.

13. Elliptischer Querläufer

Die Annahme $\sigma = \pi/2, \varepsilon < 1$ läßt sich durch Grenzübergang aus dem elliptischen Treffer (Abschn. 9) herleiten. Die Grundisochrone k^c ist eine *Ellipse* mit Q_0 als Brennpunkt, zu l' normaler Hauptachse und der numerischen Exzentrizität ε (Abb. 11); die große Halbachse a berechnet sich aus den Daten der Ausgangsposition gemäß

$$a = r_0 \cdot \frac{1 - \varepsilon \sin \varphi_0}{1 - \varepsilon^2}. \tag{13.1}$$

Der Begegnungs-Schicksalspunkt O fällt ins Unendliche — auch die Treffzeitformel (8.4) liefert $T = \infty$ —, die Trägerfläche $\Gamma = Ok^c$ wird mithin zu einem *l-parallelen elliptischen Zylinder.*

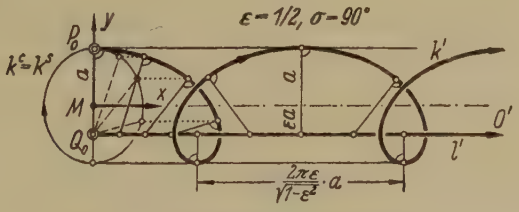

Abb. 11. Elliptischer Querläufer.

Verschieben wir das kartesische Koordinatensystem x, y, z mit seinem Ursprung in den Mittelpunkt der Basisellipse k^c und führen wir in Anlehnung an (9.1) die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} X &= x - \varepsilon z, & v^2 x &= X - \varepsilon Z, \\ Y &= -vy, & v^2 y &= -v Y, \\ Z &= \varepsilon x - z, & v^2 z &= \varepsilon X - Z \end{aligned} \tag{13.2}$$

durch, wobei $v^2 = 1 - \varepsilon^2$, so erhält der Zylinder Γ die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = (1 - \varepsilon^2)\, a^2 = b^2, \tag{13.3}$$

und die interessierenden 45°-Böschungslinien sind neuerlich durch

$$dX^2 + d\,Y^2 = dZ^2 \tag{13.4}$$

gekennzeichnet. Deuten wir vorübergehend X, Y, Z als Normalkoordinaten, so definieren die Gleichungen (13.3) und (13.4) *gewöhnliche Schraublinien*, die sich (mit Unterdrückung des nicht in Betracht kommenden Vorzeichens) sofort hinschreiben lassen:

$$X = X_0 \cos\theta - Y_0 \sin\theta, \quad Y = X_0 \sin\theta + Y_0 \cos\theta, \quad Z = Z_0 - b\,\theta. \tag{13.5}$$

Setzen wir hierin für X_0, Y_0, Z_0 die Neukoordinaten des Ausgangspunktes P_0, die sich mittels (13.2) aus den alten Koordinaten

$$x_0 = r_0 \cos\varphi_0, \quad y_0 = r_0 \sin\varphi_0 - \varepsilon\, a, \quad z_0 = 0 \tag{13.6}$$

berechnen, so stellt (13.5) die Verfolger-Schicksalslinie k dar. Dieselbe ist offenbar eine *affine Schraublinie*, ihr Grundriß, die *Hundekurve* k', mithin eine *affin gestreckte verschlungene Radlinie*. Nehmen wir wie in Abb. 11 insbesondere $\varphi_0 = \pi/2$, dann schreibt sich die Hundekurve

$$x = \frac{a}{v}(\sin\theta + \varepsilon\,\theta), \quad y = a\cos\theta; \tag{13.7}$$

hieraus entnimmt man die Periodenlänge $2\pi\,\varepsilon\,a/v$ und den Streckfaktor $1/v$ der Radlinie in Laufrichtung. — Der Verfolger umkreist sein Ziel ständig in einer *Kepler-Ellipse* $k^s = k^c$, ohne es — trotz überlegener Geschwindigkeit — im Endlichen zu erreichen.

14. Hyperbolischer Querläufer

Die Annahme $\sigma = \pi/2$. $\varepsilon > 1$ läßt sich als Grenzfall eines Flüchters (Abschn. 11) ansehen. Die Grundisochrone k^c ist eine *Hyperbel* mit Q_0 als

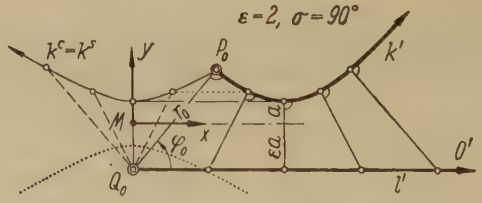

Abb. 12. Hyperbolischer Querläufer.

Brennpunkt, zu l' normaler Hauptachse und der numerischen Exzentrizität ε; die Halbachse berechnet sich auf Grund der Polargleichung gemäß

$$a = \pm\, r_0 \frac{\varepsilon \sin\varphi_0 - 1}{\varepsilon^2 - 1}, \tag{14.1}$$

wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß $a > 0$ ausfällt. Das Projektionszentrum O rückt wieder ins Unendliche, so daß die Trägerfläche $\Gamma = Ok^c$ ein *hyperbolischer Zylinder* mit der Erzeugendenrichtung l wird. — Verschieben wir das kartesische Koordinatensystem x, y, z mit seinem Ursprung ins Hyperbelzentrum und führen wir entsprechend (8.11) die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \xi &= x - wy - \varepsilon z, & 2w^2 x &= -(\xi + \eta) + 2\varepsilon\zeta, \\ \eta &= x + wy - \varepsilon z, & 2w^2 y &= -w(\xi - \eta), \\ \zeta &= \varepsilon x - z; & 2w^2 z &= -(\xi + \eta) + 2\zeta \end{aligned} \tag{14.2}$$

mit $w^2 = \varepsilon^2 - 1$ durch, so erhält der Zylinder Γ die Gleichung

$$\xi\eta = (1 - \varepsilon^2)\, a^2 = -b^2, \tag{14.3}$$

und seine 45°-Böschungslinien werden durch

$$d\xi \,.\, d\eta = d\zeta^2 \tag{14.4}$$

gekennzeichnet. Elementare Integration liefert für die *Verfolger-Schicksalslinie* k die Parameterdarstellung

$$\xi = \xi_0\, e^{\vartheta},\ \eta = \eta_0\, e^{-\vartheta},\ \zeta = \zeta_0 \pm b\vartheta, \tag{14.5}$$

wobei ξ_0, η_0, ζ_0 die vermöge (14.2) aus

$$x_0 = r_0 \cos\varphi_0,\ y_0 = r_0 \sin\varphi_0 \mp \varepsilon a,\ z_0 = 0 \tag{14.6}$$

zu bestimmenden Neukoordinaten des Ausgangspunktes P_0 sind. Die W-Kurve k kann als *pseudoeuklidische Schraublinie* aufgefaßt werden.

Die Hundekurve k' ist transzendent und zeigt die typische Erscheinung des Flüchters, besitzt aber eine Symmetrieachse und keine Asymptote (Abb. 12). Je nach dem geltenden Vorzeichen können zwei Formen unterschieden werden, zu denen alle Querläufer mit demselben Geschwindigkeitsverhältnis ε reell-ähnlich sind. Nimmt man $\varphi_0 = \pm\pi/2$ an, so erhalten die Darstellungen die Form

$$x = \frac{a}{w}(\operatorname{sh}\vartheta \pm \varepsilon\vartheta),\ y = a \,.\, \operatorname{ch}\vartheta. \tag{14.7}$$

Bei Abb. 12 gilt das obere Vorzeichen; zum unteren gehört eine Bahnform vom Charakter der Abb. 13. — Die relative Verfolgerbahn k^c im Zielsystem ist ein Ast der *Hyperbel* k^c.

15. Parabolischer Querläufer

Die Annahme $\sigma = \pi/2$, $\varepsilon = 1$ stellt einen Grenzfall des (hyperbolischen) Nachläufers dar (Abschn. 12). Die Grundisochrone k^c ist eine *Parabel* mit dem Brennpunkt Q_0 und zu l' normaler Achse, deren Parameter sich aus den Anfangsdaten mit

$$p = r_0(1 - \sin\varphi_0) \tag{15.1}$$

berechnet (Abb. 13). Das Projektionszentrum O befindet sich wieder im Fernpunkt der Ziel-Schicksalslinie l, so daß die Trägerfläche $\Gamma = Ok^c$ ein l-paralleler, unter 45° ansteigender *parabolischer Zylinder* wird,

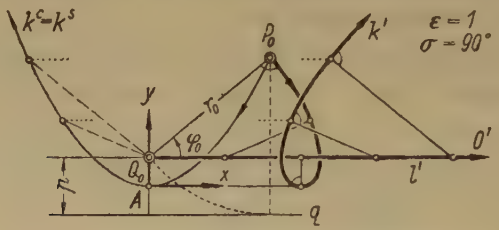

Abb. 13. Parabolischer Querläufer.

dessen krumme 45°-Böschungslinien die gesuchte Verfolger-Schicksalslinie k enthalten. — Für die Rechnung verlegen wir den Ursprung des Normalkoordinatensystems x, y, z in den Parabelscheitel. Nach Durchführung der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} p\,X &= x + z, & 2\,x &= p(X - Z), \\ p\,Y &= y, & 2\,y &= 2\,p\,Y, \\ p\,Z &= -x + z; & 2\,z &= p(X + Z), \end{aligned} \tag{15.2}$$

welche $p \neq 0$, also $\varphi_0 \neq \pi/2$ voraussetzt, nimmt der Zylinder Γ die Gleichung

$$Z^2 = 2\,Y \tag{15.3}$$

an. Die interessierenden Böschungslinien werden gekennzeichnet durch

$$dX \,.\, dZ = dY^2. \tag{15.4}$$

Elementare Integration führt auf die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} X &= X_0 + 2\,Y_0\,\vartheta + Z_0\,\vartheta^2 + {}^1\!/_3\,\vartheta^3, \\ Y &= \quad Y_0 \quad + Z_0\,\vartheta + {}^1\!/_2\,\vartheta^2, \\ Z &= \quad\quad Z_0 \quad + \quad \vartheta. \end{aligned} \tag{15.5}$$

Hierin sind X_0, Y_0, Z_0 die mittels (15.2) aus

$$x_0 = r_0 \cos\varphi_0,\ y_0 = r_0 - {}^1\!/_2\,p,\ z_0 = 0 \tag{15.6}$$

zu bestimmenden Neukoordinaten der Ausgangssituation.

Die durch (15.5) beschriebenen *Raumkurven 3. Ordnung* können als *affine Grenzschraublinien* angesehen werden[14]. Sie sind die Bahnkurven

[14] *W. Wunderlich*: Über eine affine Verallgemeinerung der Grenzschraubung. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 144 (1935), 111—129.

einer eingliedrigen, kontinuierlichen Affinitätsgruppe, deren Fixtetraeder vollkommen ausgeartet ist: Einziger Fixpunkt ist der Fernpunkt O, einzige Fixgerade die Fernerzeugende von Γ, einzige Fixebene die Fernebene. — Die Hundekurve k' erhält die einfachste Darstellung, wenn man $\varphi_0 = 270^0$, $r_0 = p/2$ voraussetzt, weil dann sämtliche Anfangskoordinaten verschwinden. Aus $X = \vartheta^3/3$, $Y = \vartheta^2/2$, $Z = \vartheta$ folgt dann als Normalform der Bahngleichung

$$x = \frac{p}{6}(\vartheta^3 - 3\,\vartheta),\quad y = \frac{p}{2}\,\vartheta^2 \text{ oder } \frac{9\,p}{2}\,x^2 = y(y - \frac{3\,p}{2})^2. \qquad (15.7)$$

Diese Kurve ist unter dem Namen „*Tschirnhaus-Kubik*" bekannt. Zu ihr sind alle parabolischen Querläufer ähnlich, wenn man den trivialen Sonderfall $p = 0$ ausnimmt, bei welchem der Verfolger querab vom Ziel steht und dieselbe Laufrichtung hat ($\varphi_0 = \pi/2$): Unter diesen Umständen begleitet er das Ziel auf einer parallelen Geraden.

16. Gewöhnliche Hundekurven

Die zu $\sigma = 0$ gehörigen „*gewöhnlichen Hundekurven*" lassen sich entsprechend $\varepsilon \gtrless 1$ unter die hyperbolischen Treffer (Abschn. 8), Nachläufer (Abschn. 12), bzw. Flüchter (Abschn. 11) einreihen. Die dort entwickelten Formeln und Gleichungen können ohne weiteres übernommen werden, wobei lediglich gewisse Vereinfachungen eintreten.

Im Falle des Treffers oder Flüchters ($\varepsilon \neq 1$) wird zufolge (8.8) und (8.18) $w = n = \varepsilon$, und mit Rücksicht auf die vereinfachten Transformationsgleichungen (8.11) lassen sich die Gleichung der Hundekurve und der zeitliche Ablauf der Verfolgung unschwer in den ursprünglichen Koordinaten hinschreiben[15]:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\left(\frac{C^{-1}}{1-\varepsilon}\cdot x^{1-\varepsilon} - \frac{C}{1+\varepsilon}\cdot x^{1+\varepsilon}\right) \\ v_p\tau = z &= \frac{1}{2}\left(\frac{C^{-1}}{1-\varepsilon}\cdot x^{1-\varepsilon} + \frac{C}{1+\varepsilon}\cdot x^{1+\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad \text{mit } C = \frac{(1+\varepsilon)\,(z_0 - y_0)}{x_0^{1+\varepsilon}}. \qquad (16.1)$$

Der *Treffer* ($\varepsilon < 1$) mündet in die Zielbahn l' berührend ein ($\omega = 0$), erreicht also das Ziel genau von achtern[16]; der *Flüchter* ($\varepsilon > 1$) nähert

[15] Vgl. etwa *G. Loria - F. Schütte*: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven II, 243.

[16] Dieser Umstand gab seinerzeit den Anlaß zur Einführung eines Schielwinkels.

sich der Zielbahn asymptotisch, bleibt aber hinter dem Ziel immer mehr zurück. Die Isochronen sind konzentrische Ellipsen bzw. Hyperbeln.

Im Falle des *Nachläufers* ($\varepsilon = 1$) wird gemäß (12.7) $c = p$ und die vereinfachten Transformationsformeln (12.4) liefern das Ergebnis[15]

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2} \ln x + C \\ v_P \tau = z &= -\frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2} \ln x + C \end{aligned} \quad \text{mit } C = \frac{x_0^2}{2p} + \frac{p}{2} \ln x_0. \tag{16.2}$$

Die Bahnkurve nähert sich asymptotisch dem Zielkurs l', der Verfolger bleibt aber im endlichen Grenzabstand $r_\infty = p/2$ hinter dem Ziel zurück. Die Isochronen sind kongruente und koachsiale Parabeln.

17. Bahnkrümmung

Technische Realisierungen des Verfolgers, wie beispielsweise zielsuchende Geschosse, besitzen stets nur ein mehr oder weniger beschränktes Wendevermögen. Dies hat zur Folge, daß die Verfolgungsbahnen praktisch nur soweit mit den berechneten übereinstimmen können, als deren Krümmungsradius einen gewissen Minimalwert nicht unterschreitet, und hieraus ist die besondere Bedeutung zu ermessen, die der Untersuchung der *Bahnkrümmung* zukommt.

Zur Ableitung einer einfachen *Krümmungskonstruktion* für die Bahnkurven denken wir uns den Peilstrahl $P'Q'$ gemäß Abb. 14 durch einen Stab ersetzt, der in P' mit dem begleitenden Zweibein der Verfolgungskurve starr verbunden ist und mittels eines Schlitzes vom Ziel Q' gesteuert wird. Nach einem bekannten Hilfssatz der Kinematik fällt dann die gesuchte Krümmungsmitte mit dem *Momentanzentrum* M des Stabes (Zweibeins) zusammen, und dieses kann bei Kenntnis der momentanen Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}_P$ und $\mathfrak{v}_Q$ leicht gefunden werden. Man geht zu diesem Zweck zunächst durch Viertelschwenkung zu den bequemeren „gedrehten Geschwindigkeitsvektoren" $\mathfrak{v}_P^\times$ und $\mathfrak{v}_Q^\times$ über und ermittelt sodann den gedrehten Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_R^\times$ jenes Punktes R' der Stabachse, der sich gerade in Q' befindet: Die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{v}_R^\times$ und $\mathfrak{v}_P^\times$ liegen auf einer Parallelen zur Stabachse (da die Geschwindigkeitsbeträge zu den Abständen vom Momentanzentrum proportional sind), während die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{v}_R^\times$ und $\mathfrak{v}_Q^\times$ eine zur Stabachse normale Strecke aufspannen müssen (die der in die Stabachse fallenden Relativgeschwindigkeit von R' gegen Q' entspricht). Im Schnitt der durch die Vektoren $\mathfrak{v}_P^\times$ und $\mathfrak{v}_R^\times$ angezeigten

Bahnnormalen hat man dann das Momentan- und *Bahnkrümmungszentrum* M[17].

Bezeichnet r die Peilstrecke $Q'P'$ und φ den Peilwinkel gegen den Zielkurs, dann gilt für den *Bahnkrümmungsradius* ϱ die nachstehende, an Hand von Abb. 14 leicht abzuleitende Formel:

$$\varrho = \frac{r}{\sin\sigma - \varepsilon \sin\varphi}. \qquad (17.1)$$

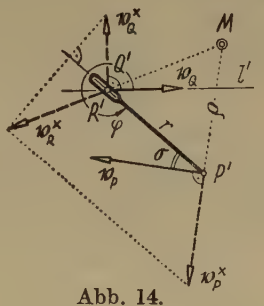

Abb. 14.

Als Grundrisse von Böschungslinien sind die hier behandelten Hundekurven durchwegs *einsinnig gekrümmt*. Dies geht auch aus der Krümmungsformel (17.1) hervor: Verschwindet die Krümmung, dann ist $\sin\varphi : \sin\sigma = 1 : \varepsilon = v_P : v_Q$ und der Verfolger läuft auf einem geraden Kollisionskurs.

Entscheidend für die Möglichkeit einer ungestörten Verfolgungsbahn ist vor allem die „*Treffkrümmung*" $\varkappa_0 = 1/\varrho_0$, d. h. die Krümmung der Hundekurve im Treffpunkt O'. Im Falle des *hyperbolischen Treffers* erkennt man aus der Parameterdarstellung (8.20) der Schicksalslinie k, deren Krümmung in O im wesentlichen von der Größe $\zeta/\xi^2 \sim \vartheta^{2n-1}$ abhängt, daß auch

$$\varkappa_0 \begin{cases} = 0 & \text{für } n > \tfrac{1}{2} \text{ (Abb. 6)}, \\ \neq 0, \neq \infty & \text{für } n = \tfrac{1}{2} \text{ (kubische Hundekurven)}, \\ = \infty & \text{für } n < \tfrac{1}{2} \text{ (Abb. 1)}. \end{cases} \qquad (17.2)$$

Auch beim *parabolischen und elliptischen Treffer* ist $\varkappa_0 = \infty$; im ersten Fall folgt dies mit $n \to 0$ aus (17.2), im zweiten aus den sich auf den Treffpunkt zusammenziehenden Schleifen (Abb. 7). Ein ungestörter Bahnverlauf kann demnach nur für $n \geqq \tfrac{1}{2}$, d. h. für $4\,\varepsilon^2 \geqq 1 + 3\sin^2\sigma$ erwartet werden, und diese Bedingung verlangt $v_Q < v_P \leqq 2\,v_Q$, also verhältnismäßig langsame Verfolger[18].

18. Krümmungsgleichen

Wir betrachten wieder eine *Ähnlichkeitsschar* von Hundekurven wie in Abschn. 6 (Abb. 5) und fragen nach dem *Ort aller Punkte mit vor-*

[17] Eine ähnliche Konstruktion für die gewöhnlichen Hundekurven gab *L. Burmester* in seinem Lehrbuch der Kinematik (Leipzig 1886), S. 63.

[18] Dieser Umstand machte den von der Einführung des Schielwinkels erwarteten Effekt für die Waffentechnik illusorisch.

geschriebener Bahnkrümmung $\varkappa = 1/\varrho$. Wir bedienen uns hierzu wieder des räumlichen Fahrplandiagramms und schreiben zunächst die Krümmungsformel (17.1) auf kartesische Koordinaten um, wobei wir, um die Vorstellung zu fixieren, etwa den Fall des hyperbolischen Treffers (Abschn. 8) zugrundelegen.

Sei $P(x, y, z)$ mit $z = v_P\,\tau < 0$ der der betrachteten Bahnstelle P' des Verfolgers zugeordnete Diagrammpunkt; $Q(\varepsilon\, z \sin\sigma,\ \varepsilon\, z \cos\sigma, z)$ ist dann der zugehörige Diagrammpunkt des Ziels Q'. Die durch P' gehende Isochronenellipse hat, wie wir wissen, die numerische Exzentrizität $\varepsilon = v_Q/v_P$ und ist durch den Brennpunkt Q' (Satz 4) mit der zugehörigen Leitlinie $y = y_Q/\varepsilon^2 = (z/\varepsilon)\,.\,\cos\sigma$ bestimmt. Aus der Abb. 4, in der lediglich der Index 0 zu unterdrücken ist, lesen wir dann (unter gehöriger Beachtung der Vorzeichen) die Beziehungen

$$r = \varepsilon\, y - z\cos\sigma,\ r\sin\varphi = y\sin\sigma - x\cos\sigma \tag{18.1}$$

ab. Damit nimmt die Krümmungsformel (17.1) folgende Form an:

$$\varrho = \frac{(\varepsilon\, y - z\cos\sigma)^2}{(\varepsilon\, x - z\sin\sigma)\cos\sigma}. \tag{18.2}$$

Für $\varrho = \text{const}$ stellt (18.2) die Gleichung eines *parabolischen Zylinders* Π dar, der durch die in der Ebene $z = 0$ liegende Basisparabel $\varepsilon\, y^2 = \varrho\, x\cos\sigma$ und die Erzeugendenrichtung $x : y : z = \sin\sigma : \cos\sigma : \varepsilon$ festgelegt werden mag; er berührt die Fixebene $OUV (\zeta \equiv \varepsilon\, x - z\sin\sigma = 0)$ längs einer Erzeugenden, die der Polarebene von l bezüglich Γ angehört. Dieser Zylinder Π schneidet den Grundkegel Γ nach einer *Raumkurve 4. Ordnung* j, die in der Kegelspitze O einen Doppelpunkt (mit den Tangenten OU und OV) aufweist, also rational ist, und die Fernebene in zwei konjugiert-imaginären Punkten berührt, also geschlossen im Endlichen verläuft. Der Grundriß j' dieser Raumquartik ist die gesuchte „*Krümmungsgleiche*" $\varrho = \text{const}$. Es handelt sich um eine die Ferngerade berührende *rationale Quartik*, die im Knotenpunkt O' die beiden geraden Kollisionskurse berührt. Praktisch kommt jedoch nur jener Teil in Betracht, der von der unterhalb der Ebene $z = 0$ verlaufenden Schleife der Quartik j herrührt.

Bezeichnet $\varrho_{\min}$ den Radius des kleinsten Drehkreises, den ein Verfolger mit beschränktem Wendevermögen zu durchlaufen vermag, dann bilden die Krümmungsgleichen $\varrho = \pm\,\varrho_{\min}$ die innere Grenze jenes Gebietes, in welchem die Verfolgungsbahn keine Störung erleidet. — Die Grenze der ungestörten Verfolgung *vom Zielsystem aus gesehen* wird von der Parallelprojektion der zu $\varrho = \pm\,\varrho_{\min}$ gehörigen Raumquartiken

j gebildet. Es handelt sich um zwei *Pascalschnecken* j^s, deren Gleichung in Polarkoordinaten r, φ bereits in (17.1) vorliegt[19]. Aus dieser Polardarstellung kann man über

$$x = r\sin(\sigma - \varphi) + \varepsilon z \sin\sigma, \quad y = r\cos(\sigma - \varphi) + \varepsilon z \cos\sigma, \tag{18.3}$$

wobei z aus der Isochronengleichung

$$r[1 - \varepsilon\cos(\sigma - \varphi)] = (\varepsilon^2 - 1)\, z \cos\sigma \tag{18.4}$$

entnommen wird, zur nachstehenden Darstellung der Krümmungsgleiche j' mittels φ als Parameter gelangen:

$$x = \frac{\varrho}{1-\varepsilon^2}(\sin\sigma - \varepsilon\sin\varphi)\left[\sin(\sigma - \varphi) - \varepsilon\,\mathrm{tg}\,\sigma + \frac{\varepsilon^2\sin\varphi}{\cos\sigma}\right],$$

$$y = \frac{\varrho}{1-\varepsilon^2}(\sin\sigma - \varepsilon\sin\varphi)[\cos(\sigma - \varphi) - \varepsilon]. \tag{18.5}$$

19. Bahnscheitel

Wird eine Bahnkurve von einer Krümmungsgleiche berührt, so liegt an der Berührungsstelle ein *Scheitel* vor. Die Kenntnis dieser Bahnscheitel ist bei beschränktem Wendevermögen ebenfalls wichtig für die Beurteilung eines störungsfreien Laufs.

Zwecks Ermittlung der Bahnscheitel führen wir in die Krümmungsformel (18.2) gemäß (8.11) die Hilfskoordinaten ξ, η, ζ ein, um anschließend die einfache Parameterdarstellung (8.20) anwenden zu können. Man erhält:

$$\varrho = \frac{[(1-n)\,\varepsilon\xi + (1+n)\,\varepsilon\eta - 2\,\zeta\sin\sigma]^2}{4\,n^4\,\zeta\cos^3\sigma} =$$

$$= \frac{[(1-n)\,\varepsilon\xi_0\,\vartheta^{-n} + (1+n)\,\varepsilon\eta_0\,\vartheta^n - 2\,\zeta_0\sin\sigma]^2\,\vartheta}{4\,n^4\,\zeta_0\cos^3\sigma} \tag{19.1}$$

$d\varrho/d\vartheta = 0$ führt dann auf die folgende Bestimmungsgleichung für die zu stationären Werten von ϱ gehörigen ϑ-Werte:

$$(1-n)(1-2n)\,\varepsilon\,\xi_0\,\vartheta^{-n} + (1+n)(1+2n)\,\varepsilon\,\eta_0\vartheta^n - 2\,\zeta_0\sin\sigma = 0. \tag{19.2}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$(1-n)(1-2n)\,\varepsilon\,\xi + (1+n)(1+2n)\,\varepsilon\,\eta - 2\,\zeta\sin\sigma = 0 \tag{19.3}$$

[19] „*Drehkreiskurven*" bei *R. Hosemann* a. a. O. — Für die gewöhnlichen Hundekurven ($\sigma = 0$) reduziert sich die Drehkreiskurve j^s auf einen doppelt zählenden *Kreis*; die Krümmungsgleiche j' weist eine Selbstberührung auf.

oder — nach Rückkehr zu den alten Koordinaten —

$$2\,x\sin\sigma + 3\,y\cos\sigma = (2\,\varepsilon + \varepsilon^{-1}\cos^2\sigma)\,z. \qquad (19.4)$$

Diese Gleichung stellt eine durch den Ursprung O gehende *Ebene* γ dar, die alle zu Bahnscheiteln gehörigen Schicksalspunkte enthält. Die Scheitel einer Hundekurve liegen mithin auf den Grundrissen jener beiden (leicht angebbaren) *Erzeugenden* e_1 und e_2, die γ aus dem Trägerkegel Γ ausschneidet. Anzahl und Realität der Scheitel hängen ganz vom Typ der Hundekurve ab.

Nähere Untersuchung, die sich vorteilhaft auf den durch

$$x : y : z = 3\sin\sigma : 3\cos\sigma : (2\,\varepsilon + \varepsilon^{-1}) \qquad (19.5)$$

dargestellten Polstrahl g von γ bezüglich Γ stützt, zeigt, daß ein hyperbolischer Treffer für $n \geqq \frac{1}{2}$ genau einen reellen Bahnscheitel besitzt, welcher für $n = \frac{1}{2}$ in den Treffpunkt rückt, während für $n < \frac{1}{2}$ zwei reelle Scheitel auftreten oder gar keine, je nachdem ob $\cos\sigma \lesseqgtr 2\,\varepsilon$. Der Übergangsfall $\cos\sigma = 2\,\varepsilon$ ist durch zusammengerückte Scheitel ausgezeichnet (γ durch $g = e_1 = e_2$); wegen $g' = l'$ ist es dann gerade der Kreuzungspunkt der Hundekurve mit dem Zielkurs, wo ein fünfpunktig berührender Krümmungskreis existiert.

Die für den hyperbolischen Treffer abgeleiteten Formeln (19.4) und (19.5) enthalten den Exponenten n nicht mehr, gelten daher auch für den elliptischen und parabolischen Treffer sowie für den Flüchter.

20. Nachtrag und Schlußwort

Als Ergänzung zu der hier auseinandergesetzten, vorwiegend geometrischen Behandlungsweise des vorliegenden Verfolgungsproblems möge nachträglich noch eine *rein analytische Durchführung* skizziert werden. Die Betrachtungen sollen dabei auf den *hyperbolischen Treffer* beschränkt bleiben.

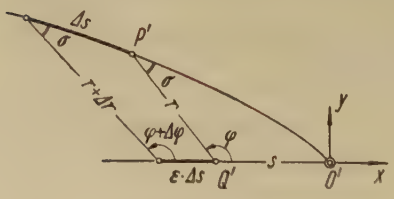

Abb. 15.

Wir legen die Verfolgerposition P' gegenüber dem Ziel Q' durch den Abstand $r = Q'P'$ und den vom Zielkurs aus gemessenen Peilwinkel $\varphi = O'Q'P'$ fest (Abb. 15) und denken uns der Bequemlichkeit halber den Bewegungsablauf umgekehrt, wobei das Treffereignis die Ausgangssituation abgebe. Rückt der Verfolger in der Zeitspanne $\Delta\tau$

um das Wegstück Δs weiter, so legt das Ziel die Strecke $\varepsilon \cdot \Delta s$ zurück und die Relativkoordinaten r, φ des Verfolgers erfahren die Zuwächse Δr und $\Delta \varphi$. Projizieren wir das von P', Q' und den Nachbarlagen gebildete Viereck einmal normal auf den Peilstrahl $P'Q'$ und einmal parallel dazu, gleichzeitig mit $\Delta\tau \to 0$ zu Differentialen übergehend, so erhalten wir die beiden *Schlüsselgleichungen*[2]

$$dr = (\cos\sigma + \varepsilon\cos\varphi)\,ds, \quad r\,.\,d\varphi = (\sin\sigma - \varepsilon\sin\varphi)\,ds. \tag{20.1}$$

Division führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos\sigma + \varepsilon\cos\varphi}{\sin\sigma - \varepsilon\sin\varphi}\,d\varphi, \tag{20.2}$$

die sich unmittelbar integrieren läßt. Man erhält mittels der den rechten Integranden rationalisierenden Substitution

$$wu = \sin\sigma\,.\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \varepsilon \text{ mit } w^2 = \varepsilon^2 - \sin^2\sigma > 0 \tag{20.3}$$

nach einiger Rechnung

$$r = c\cdot\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\nu}\cdot\frac{w^2u^2 + 2\varepsilon wu + (2\varepsilon^2 - w^2)}{u^2-1} \text{ mit } \nu = \frac{\cos\sigma}{w} > 1. \tag{20.4}$$

Kehrt man unter Berücksichtigung der zur Ausgangssituation $r_0 = 0$ gehörigen Anfangswerte

$$\sin\varphi_0 = \frac{\sin\sigma}{\varepsilon},\ \cos\varphi_0 = -\frac{w}{\varepsilon},\ u_0 = 1 \tag{20.5}$$

zum Argument φ zurück, so erhält man die Darstellung

$$r = C\,.\left(\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right)^{\nu-1}\left(-\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)^{-\nu-1}, \tag{20.6}$$

in welcher man die *Polargleichung der Relativbahn des Verfolgers* vor sich hat[20]. Aus der Kenntnis einer Anfangsstellung r_1, φ_1 ließe sich der Wert der Integrationskonstanten C bestimmen.

Nunmehr liefert die zweite Gleichung (20.1) den *Verfolgerweg*

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{r\,d\varphi}{\sin\sigma - \varepsilon\sin\varphi} = \frac{2c}{w\sin^2\sigma}\int_1^u\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\nu}R(u)\,du, \tag{20.7}$$

wobei

[20] *R. Hosemann* führt a. a. O. die Integration der Gleichung (20.2) mittels der komplexen Substitution $z = \exp(i\varphi)$ durch.

$$R(u) = \frac{w^2 u^2 + 2\varepsilon wu + (2\varepsilon^2 - w^2)}{(u^2 - 1)^2}. \tag{20.8}$$

Diese rationale Funktion gestattet die Partialbruchzerlegung

$$R(u) = \frac{A_1}{(u-1)^2} + \frac{A_2}{u^2 - 1} + \frac{A_3}{(u+1)^2} \tag{20.9}$$

$$\text{mit } A_1 = \frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon + w),\ A_2 = w^2 - \varepsilon^2,\ A_3 = \frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon - w).$$

Damit läßt sich das auftretende Integral elementar auswerten:

$$\int_1^u \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^\nu R(u)\,du = \frac{A_1}{2(\nu-1)}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\nu-1} + \frac{A_2}{2\nu}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^\nu + \\ + \frac{A_3}{2(\nu+1)}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\nu+1} \tag{20.10}$$

und man erhält bei Rückkehr zum Argument φ nach einigen Umformungen

$$s = C \cdot \left(\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right)^{\nu-1}\left(-\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)^{-\nu-1} \cdot \frac{1 - \varepsilon\cos(\varphi-\sigma)}{(1-\varepsilon^2)\cos\sigma}. \tag{20.11}$$

Die Richtigkeit der Ausdrücke (20.6) und (20.11) für r und s kann nachträglich durch Einsetzen in die Schlüsselgleichungen (20.1) unschwer bestätigt werden. Vergleich miteinander liefert die Beziehung

$$\frac{r}{s} = \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\sigma}{1 - \varepsilon\cos(\varphi - \sigma)}, \tag{20.12}$$

welche für $s = \text{const}$ die *Polargleichung eines Isochronenkegelschnitts* darstellt (Abschn. 6). Auch die *Treffzeitformel* (8.4) läßt sich unmittelbar daraus gewinnen, wenn man $s = v_P\, T$ setzt. — Mit Kenntnis der Ausdrücke für r und s kann natürlich auch sofort eine *Parameterdarstellung der Hundekurve*, etwa durch

$$x = r\cos\varphi - \varepsilon s,\ y = r\sin\varphi, \tag{20.13}$$

hingeschrieben werden.

Natürlich sind auch bei der analytischen Behandlungsweise die den verschiedenen Erscheinungsformen der Hundekurve gemäß Abschn. 7 entsprechenden Fallunterscheidungen zu berücksichtigen.

Man lasse sich durch die verhältnismäßige Kürze der soeben auseinandergesetzten rein rechnerischen Behandlung nicht täuschen, da

viele untergeordnete, jedoch ziemlich langwierige Zwischenrechnungen unterdrückt wurden. Gewiß ging auch die geometrische Behandlung mit den Raumdiagrammen nicht ohne bedeutenden Aufwand ab und verlangte einige Kenntnisse aus der höheren Geometrie, doch gewährt sie zweifellos einen wesentlich tieferen Einblick und stellt interessante Zusammenhänge mit anderen Gegenständen her, welche nicht von vornherein zu erwarten waren. Daß beispielsweise die auftretenden Verfolgerbahnen als Parallelprojektionen räumlicher W-Kurven aufgefaßt werden können, ist bisher nicht einmal bei den gewöhnlichen Hundekurven ($\sigma = 0$) bemerkt worden, obwohl dies aus ihren verhältnismäßig einfachen und seit langem bekannten Gleichungen (16.1) und (16.2) unschwer herauszulesen gewesen wäre. Die vorliegende Abhandlung kann daher auch — über *R. Hosemann* hinaus, der sein Hauptaugenmerk auf die Relativbahnen richtet — erstmals eine Diskussion und Bilder der *absoluten Verfolgerbahnen* bringen.

On the Product of Two Confluent Hypergeometric Functions

By

F. M. Ragab, Princeton, N. J., U. S. A.

(Received April 17, 1957)

§ 1. Introductory: In § 2, the following formula will be established.

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\, {}_1F_1(a; c; -x)\, {}_1F_1(a; c; -b/x)\, dx =$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(a-\frac{1}{2})\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-\frac{1}{2})}\, {}_1F_1(2a-1; 2c-1; -2b^{\frac{1}{2}}), \ldots, \qquad (1)$$

where $R(a) > \frac{1}{2}$ and b is taken for simplicity to be real and positive.

In § 3 a generalization of (1) will be established.

This generalization is

$$\prod_{r=1}^{p-1} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-1}\, {}_1F_1(a; c; -x_r)\, {}_1F_1\left(a; c; -\frac{b}{x_1 x_2 \ldots x_{p-1}}\right) dx_r =$$

$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\right]^p \frac{\Gamma(pa-p+1)}{\Gamma(pc-p+1)}\, p^{-pa+pc-\frac{1}{2}}$$

$$\times\, {}_1F_1(pa-p+1; p\beta-p+1; -p\,b^{1/p}), \ldots \qquad (2)$$

where $R(a) > \dfrac{r}{p}$, $r = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ and b is real and positive. When $p = 2$; (2) becomes (1).

The following formulae are required in the proof:

If $p \geqslant q+1$, $l \geqslant m+1$, $R(\alpha_r + k) > 0$, $r = 1, 2, \ldots, p$,

$$R(\beta_t - k) > 0,\ t = 1, 2, \ldots, l \text{ and } |\operatorname{amp} z| < \pi,$$

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1}\, E(p; \alpha_r : q; \varrho_s :: \lambda)\, E(l; \beta_t : m; \sigma_u : z/\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{\pi}{\sin k\pi} \left[z^k\, E\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p : 1-k, \varrho_1, \ldots, \varrho_q : l^{\pm i\pi} z \\ 1-k, \varrho_1, \ldots, \varrho_q, \sigma_1 - k, \ldots, \sigma_m - k\end{matrix}\right) - E\left(\begin{matrix}\alpha_1 + k, \ldots, \alpha_p + k, \beta_1, \ldots, \beta_l : l^{\pm i\pi} z \\ 1+k, \varrho_1 + k, \ldots, \varrho_q + k, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\end{matrix}\right) \right], \ldots \qquad (3)$$

[1],

If $p \leqslant q$,

$$E(p; a_r : q; l_s : z) = \frac{\Gamma(a_1) \ldots \Gamma(a_p)}{\Gamma(l_1) \ldots \Gamma(l_q)} {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p; \\ \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix} -1/z \right), \ldots, \quad (4)$$

[2]; and

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} {}_1F_1(a; c; -x)\, dx = \frac{\Gamma(\lambda)\, \Gamma(c)\, \Gamma(a-\lambda)}{\Gamma(a)\, \Gamma(c-\lambda)}, \ldots \quad (5)$$

where

$$0 < R(\lambda) < R(a), [3].$$

Other formulae required are

$$\Gamma(z)\, \Gamma(z+\frac{1}{p})\, \Gamma(z+\frac{2}{p}) \ldots \Gamma(z+\frac{p-1}{p}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}\, p^{\frac{1}{2}-pz}\, \Gamma(pz), \ldots, \quad (6)$$

and the differential equation satisfred by $y = {}_1F_1(a; c; x)$ namely

$$x \frac{d^2 y}{d x^2} + (c - x) \frac{d y}{d x} - a y = 0, \ldots. \quad (7)$$

It may be noted that the second solution of (7) is

$$x^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c; x).$$

Applications of (1) and (2) are given in § 4.

§ 2. Proof of (1): In (3) take $k = -\frac{1}{2}$, $p = l = 1$ and $q = m = 1$ with $\alpha_1 = \beta_1 = a$ and $\varrho_1 = \sigma_1 = c$; then write $1/x$ and $1/b$ for λ and z respectively and apply (4), so getting if $R(a) > \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} {}_1F_1(a; c; -x)\, {}_1F_1(a; c; -b/x)\, dx =$$

$$= -\pi \frac{\Gamma(c)\, \Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})\, \Gamma(a)\, \Gamma(c+\frac{1}{2})} b^{\frac{1}{2}} {}_2F_3 \left[\begin{matrix} a, a+\frac{1}{2}; \\ \frac{3}{2}, c, c+\frac{1}{2} \end{matrix} b \right] +$$

$$+\pi \frac{\Gamma(c)\, \Gamma(a-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\, \Gamma(a)\, \Gamma(c-\frac{1}{2})} {}_2F_3 \left[\begin{matrix} a-\frac{1}{2}, a; \\ \frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}, c \end{matrix} b \right] =$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(a-\frac{1}{2})\, \Gamma(c)}{\Gamma(a)\, \Gamma(c-\frac{1}{2})} \left[1 - \frac{(2a-1;1)}{(2c-1;1)} 2 b^{\frac{1}{2}} + \frac{(2a-1;2)}{2!\,(2c-1;2)} 4 b - \right.$$

$$\left. - \frac{(2a-1;3)}{3!\,(2c-1;3)} 8 b^{\frac{3}{2}} + \frac{(2a-1;4)}{4!\,(2c-1;4)} 16 b^2 - \ldots \right],$$

from this (1) follows.

§ 3. Proof of the multiple integral: Denote the integral on the left of (2) by $F(b)$; then

$$F(b) = \prod_{r=1}^{p-2} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-1} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x_r\\ c\end{matrix}\right) dx_r \int_0^\infty x^{\frac{p-1}{p}-1} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x\\ c\end{matrix}\right) {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-\dfrac{b}{x x_1 \dots x_{p-2}}\\ c\end{matrix}\right) dx,$$

$$-F'(b) = \prod_{r=1}^{p-2} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-2} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x_r\\ c\end{matrix}\right) dx_r \int_0^\infty x^{\frac{p-1}{p}-2} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x\\ c\end{matrix}\right) {}_1F_1'\left(\begin{matrix}a;-\dfrac{b}{x x_1 \dots x_{p-2}}\\ c\end{matrix}\right) dx,$$

and

$$F''(b) = \prod_{r=1}^{p-2} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-3} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x_r\\ c\end{matrix}\right) dx_r \int_0^\infty x^{\frac{p-1}{p}-3} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x\\ c\end{matrix}\right) {}_1F_1''\left(\begin{matrix}a;-\dfrac{b}{x x_1 \dots x_{p-2}}\\ c\end{matrix}\right) dx.$$

Hence from (7),

$$-b F''(b) = \prod_{r=1}^{p-2} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-2} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x_r\\ c\end{matrix}\right) dx_r \int_0^\infty x^{\frac{p-1}{p}-2} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x_r\\ c\end{matrix}\right) \times \left[-\left(c + \frac{b}{x x_1 x_2 \dots x_{p-2}}\right) F' + a F\right] dx.$$

$$\therefore -b F''(b) - c F'(b) = L + M, \dots \tag{8}$$

where

$$L = -b \prod_{r=1}^{p-2} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-3} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x_r\\ c\end{matrix}\right) dx_r \times \int_0^\infty x^{\frac{p-1}{p}-3} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x\\ c\end{matrix}\right) {}_1F_1'\left(\begin{matrix}a;-\dfrac{b}{x x_1 x_2 \dots x_{p-2}}\\ c\end{matrix}\right) dx,$$

and

$$M = a \prod_{r=1}^{p-2} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-2} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x_r\\ c\end{matrix}\right) dx_r \times \int_0^\infty x^{\frac{p-1}{p}-2} {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-x\\ c\end{matrix}\right) {}_1F_1\left(\begin{matrix}a;-\dfrac{b}{x x_1 x_2 \dots x_{p-2}}\\ c\end{matrix}\right) dx.$$

Jo find the values of L and M, we have

$$F(b) = \prod_{r=1}^{p-2} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-1} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix}a; -x_r\\ c\end{matrix}\right) dx_r$$

$$\times \int_0^\infty x_{p-1}^{\frac{p-1}{p}-1} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix}a; -x_{p-1}\\ c\end{matrix}\right) {}_1F_1\left(\begin{matrix}a; -\dfrac{b}{x_1 x_2 \cdots x_{p-1}}\\ c\end{matrix}\right) dx_{p-1}.$$

In the last integral replace x_{p-1} by $(b/x\, x_1\, x_2 \cdots x_{p-2})$ where x is the new variable of integration, then

$$b^{\frac{1}{p}-1} F(b) = \prod_{r=1}^{p-2} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_r^{\frac{r+1}{p}-2} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix}a; -x_r\\ c\end{matrix}\right) dx_r$$

$$\times \int_0^\infty x^{\frac{1}{p}-2} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix}q; -x\\ c\end{matrix}\right) {}_1F_1\left(\begin{matrix}a; -\dfrac{b}{x\, x_1 x_2 \cdots x_{p-2}}\\ c\end{matrix}\right) dx, \ldots \qquad (9).$$

From (9), it is easily seen that

$$M = a\, b^{\frac{1}{p}} F(b).$$

Now differentiale (9) $w\,.\,r\,.\,t\,.\,b$ and get

$$L = b^{\frac{1}{p}} F'(b) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) b^{\frac{1}{p}-1} F(b).$$

Thus (8) becomes

$$-b\,F''(b) - (c + b^{\frac{1}{p}})\,F'(b) - [a + (\frac{1}{p} - 1)]\, b^{\frac{1}{p}-1} F(b) = 0, \ldots \qquad (10)$$

Next in (7) put $x = -p\,\lambda^{\frac{1}{p}}$, replace a and c by $pa - p + 1$ and $p\,c - p + 1$ and get

$$-b\frac{d^2 y}{d\lambda^2} - (c + \lambda^{\frac{1}{p}})\frac{dy}{d\lambda} - [a + (\frac{1}{p} - 1)]\,\lambda^{\frac{1}{p}-1}\, y = 0, \ldots \qquad (11)$$

which is (10) with y in place of $F(b)$ and λ in place of b.

Thus

$$F(b) = A\, {}_1F_1(p\,a - p + 1; p\,c - p + 1; -p\,b^{\frac{1}{p}}) +$$

$$+ B(-p\,b^{\frac{1}{p}})^{p-p\,c}\, {}_1F_1(p\,a - p\,c + 1; 1 + p - p\,c; -p\,b^{\frac{1}{p}}),$$

where A and B are two constants to be determined.

Here let it be assumed that $R(c) > 1$, multiply hy b^{1-c} and let $b \to 0$; then clearly B must be zero.

Again to determine A; let $b \to 0$; then if $R(a) > \frac{r}{p}$, $(r = 1, 2, 3, \ldots, p-1)$

$$A = \prod_{r=1}^{p-1} \int_0^\infty x_r^{\frac{r}{p}-1} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} a; -x_r \\ c \end{matrix}\right) dx_r = \prod_{r=1}^{p-1} \frac{\Gamma(r/p)\,\Gamma(c)\,\Gamma(a-r/p)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-r/p)}, \text{ by (5)}$$

Hence by (6);

$$A = (2\pi)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}\, p^{pc-pa-\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\right]^p \frac{\Gamma(pa-p+1)}{\Gamma(pc-p+)};$$

from which (2) follows.

§ 4. Particular cases: In (1) and (2); take $a = \frac{1}{2} - k + m$, $c = 1 + 2m$; then the confluent hypergeometric function becomes Whittaker's function defined by

$${}_1F_1(\tfrac{1}{2} - k + m,\ 1 + 2m;\ -x) = e^{-\frac{1}{2}x}\,(-x)^{-\frac{1}{2}-m}\, M_{k,m}(-x), \ldots \quad (12)$$

and then get

$$\int_0^\infty \exp\left[-\tfrac{1}{2}(x+b \mid x)\right] x^{-\frac{1}{2}}\, M_{k,m}(-x)\, M_{k,m}\left(-\frac{b}{x}\right) dx =$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}}(-2)^{-\frac{1}{2}-2m}\, b^{\frac{1}{4}}\, e^{-b^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(m-k)\,\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+2m)}\, M_{2k+\frac{1}{2},\,2m}(-2b^{\frac{1}{2}}), \ldots, \quad (13)$$

where $R(m-k) > 0$ and b is real and positive; and

$$\prod_{r=1}^{p-1} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} + \frac{b}{x_1\, x_2 \ldots x_{p-1}}\right)\right]$$

$$x_r^{\frac{r}{p}-1}\, M_{k,m}(-x_r)\, M_{k,m}\left(-\frac{b}{x_1\, x_2 \ldots x_{p-1}}\right) dx_r =$$

$$= (-1)^{-\frac{1}{2}-pm}\,(2\pi)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}\, p^{\frac{1}{2}p+pk-1}\, b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$$

$$\times \exp\left[-\tfrac{1}{2}\, p\, b^{\frac{1}{p}}\right] \left[\frac{\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\right]^p \frac{\Gamma(1-pk+pm-\frac{1}{2}p)}{\Gamma(1+2pm)}$$

$$X\, M_{-\frac{1}{2}+\frac{p}{2}+pk,\,pm}(-p\, b^{\frac{1}{p}}), \ldots, \quad (14)$$

where $R(\frac{1}{2} - k + m) > \frac{r}{p}$, $r = 1, 2, 3, \ldots, p-1$, and b is real and positive.

Again (1) and (2) in combination with the formula

$${}_1F_1(n+\tfrac{1}{2};\,2n+1;\,-x) = \Gamma(n+1)\,(x/4)^{-n}\,e^{-\frac{1}{2}x}\,I_n(\tfrac{1}{2}x),\ \ldots, \quad (15)$$

where $I_n(\frac{1}{2}x)$ is the modified Bessel function of the first kind give

$$\int_0^\infty \exp\left[-\tfrac{1}{2}(x+b\,|\,x)\right] x^{-\frac{1}{2}}\,I_n(\tfrac{1}{2}x)\,I_n(b/2\,x)\,dx =$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{16}\right)^n \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(2n+\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)}$$

$$\times\ {}_1F_1(2n;\,4n+1;\,-2b^{\frac{1}{2}}),\ \ldots, \quad (16)$$

where $R(n) > \frac{1}{2}$ and b is real and positive; and

$$\prod_{r=1}^{p-1}\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(x_1+x_2+\ldots+x_{p-1}+\frac{b}{x_1\,x_2\ldots x_{p-1}}\right)\right] x_r^{\frac{r}{p}-1}$$

$$I_n(\tfrac{1}{2}x_r)\,I_n\left(\frac{b}{2\,x_1\,x_2\ldots x_{p-1}}\right)dx_r = (1/4)^{pn}\,b^n\cdot p^{\frac{1}{2}p+pn-\frac{1}{2}}\cdot(2\pi)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Gamma(1+pn-\frac{1}{2}p)}{\Gamma(1+2pn)}\left[\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+1)}\right]^p {}_1F_1(1+pn-\tfrac{1}{2}p;\,1+2pn;\,-$$

$$-\,p\,b^{\frac{1}{p}}),\ \ldots, \quad (17)$$

where $R(n+\frac{1}{2}) > \dfrac{r}{p}$, $r = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ and b is real and positive.

Other particular cases can be obtained from (1) and (2).

References

[1] *Ragab, F. M.*, Proc. Glasg. Inatb. Assoc. I, p. 192, 1953.

[2] *Mac Robert, T. M.*, "Functions of a Complex Variable (4 th edit) Glasgow, 1954, p. 352.

[3] *Erdélyi, A.*, "Higher Transcendental Functions" Val. I. (1953), p. 285.

Institute for Advanced
Study, Princeton, N. J., U. S. A.
and
EIN SHAMS University,
ABBASSIA, Cairo, Egypt.

On Some Moments and Distributions Occurring in the Theory of Linear Stochastic Processes. - I.

By

Z. A. Lomnicki and S. K. Zaremba

Boulton Paul Aircraft, Ltd., Wolverhampton, England

(Received April 29, 1957)

1. Introduction

In 1943 *H. B. Mann* and the late *Abraham Wald* established the basic estimation procedures connected with linear stochastic difference equations. Their joint paper [15] dealing with this subject has been widely and deservedly quoted, but on some occasions important results have been read into it which were neither obtained nor claimed by the authors. It has been said, for instance, (cf. [1 a], p. 260) that the asymptotic joint normal properties of the serial correlation estimators were deduced in [15], when in fact correlation coefficients are not even mentioned in this work. It has also been stated that the method developed in it could yield a proof of asymptotic normality of the sample covariances in the general case of a linear stochastic process (cf. e. g. [1]). However, a careful study of the relevant parts of the paper by *Mann* and *Wald* reveals the existence of critical gaps in some of the arguments, as well as the necessity of re-wording one of the theorems; these facts were acknowledged by Prof. *Mann* in his very helpful correspondence with the present writers. It ought to be, therefore, realized that no proof of the abovementioned properties of the autocorrelation and covariance functions has so far been published.

A proof of the required property of the sample covariances could be obtained by a method based on the concept of m-dependent variables, which was implicit in the work of *Mann* and *Wald* [15], and was later used by several authors (cf. [9], [4], [16]). Nevertheless, results obtained in this way would be bound to be relatively weak, insomuch as the existence of higher moments would not be assured, and hardly any useful

information could be obtained about the rapidity of convergence of the probability distributions; applications to linear combinations of unboundedly increasing numbers of covariance estimators would be ruled out, necessitating difficult *ad hoc* arguments to deal with such expressions as the incomplete integral of the periodogram, various estimators of the spectral density function, etc.

On the other hand, it was felt that the fruitfulness of the much older approach via the moments had been far from exhausted; this is the line of approach followed throughout the present paper. As a first step, a general expression is derived for the univariate and mixed moments of the variables of a linear process; apart from any interest which it may have of itself, and independently of a straightforward application to the sample mean, it yields a formula for all the moments of the sample covariances. These moments are seen to be, asymptotically, those of a normal multivariate distribution; hence the asymptotic joint normality of these estimators. This result is initially derived under the assumption that the random variables generating the process have finite moments of every order, but an elaboration of a device introduced elsewhere [14a] permits the extension of such a conclusion to cases when only a few moments are postulated.

As a corollary, the asymptotic distribution of the estimators of the autocorrelation coefficients is shown to be normal. This still applies when a polynomial trend has to be eliminated. The effects of such a trend elimination were discussed by the authors in the *Annals of Mathematical Statistics* [13]. In order to treat rigourously the second moments of the estimators of the autocorrelation coefficients, it was necessary to compute laboriously the fourth moments of the sample covariances; this part of the paper should be regarded as superseded by the more general results published presently.

Higher moments are particularly useful in the investigation of the tails of a probability distribution (and this is why fourth moments were required in [13]), but it is clear that, in general, an exact knowledge of the moments of a distribution is capable of giving precise information on the rapidity with which a distribution tends to its normal limit. The exact formulae (given in Sections 5 and 6) for the moments of the sample covariances are composed of main parts, corresponding to the respective asymptotic values, and of remainder terms. For some purposes, a knowledge of the order of magnitude of the remainders is sufficient. Nothing more is required to obtain asymptotic expressions for the

moments of the incomplete integral of the periodogram and of some estimators of the spectral density function; propositions concerning asymptotic distributions follow immediately, and are readily extended to the case when only the fourth moments of the variables generating the process are assumed to be finite. The formulae for the moments of the sample covariances are further applied, in the second part of the present paper, to problems connected with statistical spectral analysis; more precise expressions for the remainders are required there, but they are still found to be tractable.

A separate publication will deal with the applications of the present investigation to estimation problems in autoregressive schemes, vindicating in practice the procedures established by *Mann* and *Wald* [15], as well as providing a rigorous justification for the related test of fit devised by *Quenouille* [18], and for its modification proposed by *Bartlett* and *Diananda* [1].

2. Preliminary remarks

According to the generally accepted terminology, a linear stochastic process is a process defined by an expression of the type of

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \varepsilon_{t-i},$$

or

$$x_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{t-k} \varepsilon_k, \tag{2.1}$$

if, for the sake of convenience, we make $h_i = 0$ whenever $i < 0$. We assume in any case that the infinite sum $\sum h_k^2$ converges, and that $\{\varepsilon_t\}$ is a wide-sense stationary process with zero mean and constant variance, whose succesive variables are uncorrelated. Then x_t, understood as the limit in the mean of $x_{t,m}$:

$$x_t = \underset{m \to \infty}{\text{l. i. m.}}\, x_{t,m}, \tag{2.2}$$

where

$$x_{t,m} = \sum_{k=-m}^{\infty} h_{t-k} \varepsilon_k,$$

is a well-defined random variable for any value of t. The moments of the variables of this process will be computed on the basis of the following, fairly intuitive proposition:

Lemma 2.1. If the process $\{x_t\}$ is defined by (2.1), and if, for every set of pairwise distinct integers $\tau_1, \ldots, \tau_s$,

$$E(\varepsilon_{\tau_1}^{\nu_1} \ldots \varepsilon_{\tau_s}^{\nu_s}) = \mu_{\nu_1} \ldots \mu_{\nu_s} \tag{2.3}$$

whenever the sum of the positive integers $\nu_1, \ldots, \nu_s$ does not exceed a certain even number $2Q$, the moments $\mu_1 = 0, \mu_2, \ldots, \mu_{2Q}$ being finite constants, then, for every set of positive integers $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ whose sum does not exceed $2Q$, and for every associated set of arbitrary integers $t_1, \ldots, t_p$

$$E(x_{t_1}^{\lambda_1} \ldots x_{t_p}^{\lambda_p}) = \lim_{m \to \infty} E(x_{t_1, m}^{\lambda_1} \ldots x_{t_p, m}^{\lambda_p}) \tag{2.4}$$

Proof. Owing to (2.2),

$$\operatorname{p\,lim}_{m \to \infty} x_{t_1, m}^{\alpha_1} \ldots x_{t_p, m}^{\alpha_p} = x_{t_1}^{\alpha_1} \ldots x_{t_p}^{\alpha_p} \tag{2.5}$$

for any set of non-negative integers $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. On the other hand, it will be seen that if

$$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p \leqslant Q \tag{2.6}$$

the sequence of products $\{x_{t_1, m}^{\alpha_1} \ldots x_{t_p, m}^{\alpha_p}\}$ mutually converges in the mean. Indeed, assuming $r > 0$,

$$S = (x_{t_1, m+r}^{\alpha_1} \ldots x_{t_p, m+r}^{\alpha_p} - x_{t_1, m}^{\alpha_1} \ldots x_{t_p, m}^{\alpha_p})^2$$

is a sum of products of powers of $x_{t_1, m}, \ldots, x_{t_p, m}$ multiplied by the appropriate products of powers of $x_{t_1, m+r} - x_{t_1, m}, \ldots, x_{t_p, m+r} - x_{t_p, m}$. But each of these products, whose number is finite and independent of m and r, is itself a sum of a finite (though increasingly large) number of products of ε's multiplied by the corresponding products of h's, so that its expectation is the sum of expectations of all these products of the ε's, multiplied by the appropriate products of h's. In view of (2.3) and of $\mu_1 = 0$, any of the last-mentioned terms can have an expectation different from 0 only if any of the ε's actually appearing in it has an exponent bigger than 1.

Thus $E(S)$ is a sum of a number, depending only on $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, of products of the type of

$$[\prod_{i=1}^{x} \sum_{k=-\infty}^{m} \mu_{\gamma_i} h_{\tau(i,1)+k} \ldots h_{\tau(i,\gamma_i)+k}] [\prod_{j=1}^{y} \sum_{l=m+1}^{m+r} \mu_{\delta_j} h_{\theta(j,1)+l} \ldots h_{\theta(j,\delta_j)+l}],$$

where $\gamma_1 + \ldots + \gamma_x + \delta_1 + \ldots + \delta_y = 2\alpha$, and $\gamma_1, \ldots, \gamma_x, \delta_1, \ldots, \delta_y \geqslant 2$. The number y is necessarily positive, but x may vanish, in

which case the first factor in brackets should be omitted, and $\delta_1 + \ldots + \delta_y = 2\alpha$. But this is dominated by

$$\left[\prod_{i=1}^{x} |\mu_{\gamma_i}| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_{\tau(i,1)+k} \ldots h_{\tau(i,\gamma_i)+k}|\right] \left[\prod_{j=1}^{y} |\mu_{\delta_j}| \sum_{l=m+1}^{+\infty} |h_{\theta(j,1)+l} \ldots h_{\theta(j,\delta_j)+l}|\right],$$

where, again, the first factor in brackets should be omitted if $x = 0$. The convergence of the series follows from that of Σh_k^2, and the second factor in brackets, no longer dependent on r, tends to 0 as $m \to \infty$. Hence the sequence $\{x_{t_1,m}^{\alpha_1} \ldots x_{t_p,m}^{\alpha_p}\}$ mutually converges in the mean, and, owing to (2.5),

$$\text{l. i. m.}_{m\to\infty} x_{t_1,m}^{\alpha_1} \ldots x_{t_p,m}^{\alpha_p} = x_{t_1}^{\alpha_1} \ldots x_{t_p}^{\alpha_p} \tag{2.7}$$

(cf. e. g. Theorem 18 in [11]).

Now, if the positive integers $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ are given, two sets of non-negative integers $\{\alpha_i\}$ and $\{\beta_i\}$ can be so determined that

$$\lambda_i = \alpha_i + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

then, similarly to (2.7),

$$\text{l. i. m.}_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{p} x_{t_i,m}^{\beta_i} = \prod_{i=1}^{p} x_{t_i}^{\beta_i}. \tag{2.8}$$

But, according to a lemma by *Loève* (cf. e. g. [12], p. 469) (2.7) and (2.8) entail (2.4). Hence the proof is complete.

Obviously, if the moments of a distribution up to a certain order tend to those of a certain limiting distribution, so do the cumulants up to the same order. This leads to the following:

Corollary 2.2. Under the assumption of Lemma 2.1, if $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ are the cumulants of the ε's and if $K_2, K_3, \ldots$ are those of x_t,

$$K_s = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} h_{t-q}^s \varkappa_s = \varkappa_s \sum_{q=-\infty}^{+\infty} h_q^s \qquad (s = 2, 3, \ldots, 2Q).$$

Proof. If the ε's are independent, this is an immediate consequence of the additivity of the cumulants. But the cumulants up to the order $2Q$ are completely determined by the moments up to the same order. Hence the last identity still holds if, instead of the independence of the ε's we merely assume (2.3).

Finally, the following algebraic identity will be needed:

Lemma 2.3. If the integers n and q satisfy $n \geqslant q \geqslant 1$, we have

$$\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{n-s}{q-s} \binom{n}{s} = 0 \tag{2.9}$$

Proof. If we differentiate both sides of

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^{n-s} = (x+1)^n$$

$n - q$ times, then multiply them by $(-1)^q/(n-q)!$ and finally make $x = -1$, we obtain (2.9).

3. The mixed moments of the variables of the process

Assuming that the conditions of Lemma 2.1 are satisfied, let $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_{2Q}$ be the cumulants of ε_t. Furthermore, let

$$V_s[i(1), \ldots, i(s)] = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} h_{i(1)-q} \ldots h_{i(s)-q} \qquad (s = 2, 3, \ldots). \tag{3.1}$$

The convergence of these sums follows easily from that of Σh_t^2. Obviously, $V_s[i(1), \ldots, i(s)]$ is a symmetric function of the arguments $i(1), \ldots, i(s)$, and depends only on their differences. In particular, for any t,

$$V_s[t, \ldots, t] = V_s[0, \ldots, 0] = \sum_{q=0}^{\infty} h_q^s \qquad (s = 2, 3, \ldots). \tag{3.2}$$

But, according to Lemma 2.1, if $r \leqslant 2Q$ and $i(1), \ldots, i(r)$ are any integers,

$$E[x_{i(1)} \ldots x_{i(r)}] = \sum_{q(1), \ldots, q(r)=-\infty}^{+\infty} h_{i(1)-q(1)} \ldots h_{i(r)-q(r)} E[\varepsilon_{q(1)} \ldots \varepsilon_{q(r)}]. \tag{3.3}$$

The expectations in the right-hand side of the last equation depend on the pattern of identification of the indices $q(1), \ldots, q(r)$. In order to facilitate the study of these patterns, we introduce the following notations:

For any integral value of r, let $\mathfrak{P}_{r,y}$ with $y = 1, \ldots, Y(r)$ be all the different systems of positive integers $\{p_{r,y}(1), \ldots, p_{r,y}(m_{r,y}); \pi_{r,y}(1), \ldots, \pi_{r,y}(m_{r,y})\}$ satisfying the conditions

$$p_{r,y}(1) > p_{r,y}(2) > \ldots > p_{r,y}(m_{r,y}) > 1 \text{ and } \sum_{u=1}^{m_{r,y}} p_{r,y}(u)\, \pi_{r,y}(u) = r.$$

Here, of course, $Y(r)$ is the number of those partitions of the number r which do not include terms equal to 1. In order to simplify subsequent formulae, let

$$\pi_{r,y} = \pi_{r,y}(1) + \ldots + \pi_{r,y}(m_{r,y});$$

$$\pi_{r,y}^{(1)} = 0;\ \pi_{r,y}^{(u)} = \pi_{r,y}(1) + \ldots + \pi_{r,y}(u-1) \quad (u = 2, \ldots, m_{r,y});$$

$$p_{r,y}(1, v) = (v-1)\, p_{r,y}(1) \qquad (v = 1, \ldots, \pi_{r,y}(1));$$

$$p_{r,y}(u,v) = \sum_{v=1}^{u-1} p_{r,y}(v)\,\pi_{r,y}(v) + (v-1)\,p_{r,y}(u)$$
$$(u = 2, \ldots, m_{r,y};\ v = 1, \ldots, \pi_{r,y}(u)).$$

The system $\mathfrak{P}_{r,y}$ being given, let $\mathfrak{A}^z_{r,y}$ with $z=1, \ldots, Z_{r,y}$ be all the different, smallest possible, classes of permutations of the numbers $1, \ldots, r$ invariant under the following two types of transformation: (i) permuting among themselves the elements whose ordinal numbers are $p_{r,y}(u,v)+1, \ldots, p_{r,y}(u,v)+p_{r,y}(u)$, where u and v take any values satisfying $1 \leqslant u \leqslant m_{r,y}$ and $1 \leqslant v \leqslant \pi_{r,y}(u)$; (ii) transposing any such block of elements with any other block corresponding to the same value of u. Obviously, the classes of permutations which form $\mathfrak{A}^z_{r,y}$ are pairwise disjoint and exhaust the class of all the permutations of the numbers $1, \ldots, r$; hence

$$Z_{r,y} = r! \prod_{u=1}^{m_{r,y}} [(p_{r,y}!)^{\pi_{r,y}(u)}\,\pi_{r,y}(u)!]^{-1} \tag{3.4}$$

In the particular case when $\pi_{r,y}(1) = \ldots = \pi_{r,y}(m_{r,y}) = 1$, $\mathfrak{A}^z_{r,y}$ is equivalent to an arrangement of the numbers $1, \ldots, r$ into $m_{r,y}$ classes of $p_{r,y}(1), \ldots, p_{r,y}(m_{r,y})$ elements respectively; however, in the general case, the nature of $\mathfrak{A}^z_{r,y}$ is a little more involved owing to the invariance under the transformations of the type (ii). One of the permutations in each of the $Z_{r,y}$ classes $\mathfrak{A}^z_{r,y}$ having been chosen arbitrarily to represent its class, let $\alpha^z_{r,y}$ be the operator effecting the permutation representing the class $\mathfrak{A}^z_{r,y}$.

Finally, in order to express (3.3) in terms of the univariate moments μ_j, make

$$H^z_{r,y}[i(1), \ldots, i(r)] = \sum \prod_{u=1}^{m_{r,y}} \prod_{v=1}^{\pi_{r,y}(u)} \prod_{w=1}^{p_{r,y}(u)} h_{i\{\alpha^z_{r,y}[p_{r,y}(u,v)+w]\}-q(\pi^{(u)}_{r,y}+v)}, \tag{3.5}$$

where the sum is extended to all the sets of *pairwise distinct* integral values of the dummy variables $q(1), \ldots, q(\pi_{r,y})$ running from $-\infty$ to $+\infty$. Again, the absolute convergence of this series follows easily from that of $\sum h_i^2$. Now (3.3) can be rewritten as follows:

$$E[x_{i(1)} \ldots x_{i(r)}] = \sum_{y=1}^{Y(r)} \mu^{\pi_{r,y}(1)}_{p_{r,y}(1)} \ldots \mu^{\pi_{r,y}(m_{r,y})}_{p_{r,y}(m_{r,y})} \sum_{z=1}^{Z_{r,y}} H^z_{r,y}[i(1), \ldots, i(r)] \tag{3.6}$$

At this stage it should be noted that if, in the sum (3.5), equal values of the q's were allowed, the right-hand side of (3.6) would become a

linear combination of products of V's [cf. (3.1)]. However, the terms omitted in (3.5) can be expressed by means of appropriate H's. Thus $H^z_{r,y}$ can be represented as a difference of a product of V's and of a linear combination of H's in which the parameter corresponding to $\pi_{r,y}$ (i. e. the number of distinct q's) has been reduced by not less than 1 in comparison with $H^z_{r,y}$. If this procedure is continued $\pi_{r,y} - 1$ times, in view of the fact that

$$H^z_{r,y}[i(1), \ldots, i(r)] = V_r[i(1), \ldots, i(r)] \text{ when } \pi_{r,y} = 1,$$

the original $H^z_{r,y}$ becomes a polynomial in the V's. Clearly, in each term of this polynomial, the sum of the (not necessarily distinct) subscripts of the V's is equal to r. Thus each of these terms corresponds to some system $\mathfrak{P}_{r,y}$ in which $p_{r,y}(1), \ldots, p_{r,y}(m_{r,y})$ are the subscripts of the V's, and $\pi_{r,y}(1), \ldots, \pi_{r,y}(m_{r,y})$ are the numbers of factors with the respective subscripts.

If we substitute, in (3.6), the appropriate polynomials in the V's for the respective H's, and if we group together similar terms, we find

$$E[x_{i(1)} \ldots x_{i(r)}] = \sum_{y=1}^{Y(r)} \lambda_{r,y} \sum_{z=1}^{Z_{r,y}} \prod_{u=1}^{m_{r,y}} \prod_{v=1}^{\pi_{r,y}(u)} V_{p_{r,y}(u)}\{i[\alpha^z_{r,y}(p_{r,y}(u, v) + 1)], \ldots,$$
$$\ldots, i[\alpha^z_{r,y}(p_{r,y}(u, v) + p_{r,y}(u))]\}, \tag{3.7}$$

where $\lambda_{r,y}$ are polynomials in the moments $\mu_2, \ldots, \mu_r$, and, therefore, also polynomials in $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$; these polynomials, clearly, depend solely on r and y, and are, in particular, independent of $\{h_i\}$ and of $i(1), \ldots, i(r)$. The tedium of a direct computation of these polynomials can be avoided by means of the following device:

Making, in (3.7), $i(1) = \ldots = i(r) = 0$ and noting that, then, the terms become independent of z, we find

$$M_r = E(x_0^r) = \sum_{y=1}^{Y(r)} Z_{r,y} \lambda_{r,y} V^{\pi_{r,y}(1)}_{p_{r,y}(1)}[0, \ldots, 0] \ldots V^{\pi_{r,y}(m_{r,y})}_{p_{r,y}(m_{r,y})}[0, \ldots, 0]. \tag{3.8}$$

But, according to a well-known formula expressing the moments of a distribution in terms of its comulants (cf. e. g. [10], p. 61),

$$M_r = \sum_{y=1}^{Y(r)} Z_{r,y} K^{\pi_{r,y}(1)}_{p_{r,y}(1)} \ldots K^{\pi_{r,y}(m_{r,y})}_{p_{r,y}(m_{r,y})},$$

where $K_2, K_3, \ldots$ are the comulants of x_0. Owing to Corollary 2.2 and in view of (3.2), the last equation can also be written thus:

$$M_r = \sum_{y=1}^{Y(r)} Z_{r,y} \varkappa_{p_r,y^{(1)}}^{\pi_r,y^{(1)}} \dots \varkappa_{p_r,y^{(m_r,y)}}^{\pi_r,y^{(m_r,y)}} V_{p_r,y^{(1)}}^{\pi_r,y^{(1)}}(0,\dots 0)\dots$$
$$\dots V_{p_r,y^{(m_r,y)}}^{\pi_r,y^{(m_r,y)}}(0,\dots,0). \quad (3.9)$$

For any fixed system of joint distributions of the ε's, the right-hand sides of (3.8) and (3.9) can be regarded as two polynomials in $V_2(0,0), \dots$ $\dots, V_r(0,\dots,0)$ which now are seen to be equal for any set of values of these variables. These variables are functions of the arguments $h_0, h_1, \dots$ which are capable of taking any real values, subject only to the condition that Σh_i^2 should converge. In particular, if we make $h_i = 0$ whenever $i \geqslant r-1$, the functions $V_2(0,0), \dots, V_r(0,\dots,0)$ become the sums of the corresponding powers of $h_0, \dots, h_{r-2}$, and it is easy to prove, by examining the relevant Jacobian, that this set of functions is independent in the neighbourhood of any point at which $h_0, \dots, h_{r-2}$ are pairwise distinct and different from 0. Therefore, the functions $V_2(0,0), \dots, V_r(0,\dots,0)$ are capable of taking any set of values in the neighbourhood of some point of the $(r-1)$-dimensional space. Hence, by equating the corresponding coefficients of the right-hand sides of (3.8) and (3.9), regarded as polynomials in $V_2(0,0), \dots,$ $V_r(0,\dots,0)$ we find

$$\lambda_{r,y} = \varkappa_{p_r,y^{(1)}}^{\pi_r,y^{(1)}} \dots \varkappa_{p_r,y^{(m_r,y)}}^{\pi_r,y^{(m_r,y)}},$$

and substituting this value of $\lambda_{r,y}$ in (3.7) we obtain finally

$$E[x_{i(1)} \dots x_{i(r)}] =$$
$$= \sum_{y=1}^{Y(r)} \sum_{z=1}^{Z_{r,y}} \prod_{u=1}^{m_{r,y}} \prod_{v=1}^{\pi_{r,y}(u)} \varkappa_{p_{r,y}(u)} V_{p_{r,y}(u)}\{i[\alpha_{r,y}^z(p_{r,y}(u,v)+1)], \dots,$$
$$\dots, i[\alpha_{r,y}^z(p_{r,y}(u,v)+p_{r,y}(u))]\}. \quad (3.10)$$

This is a generalization of a formula corresponding to $r=4$ and used by several authors who studied the covariances of the covariance estimators. In that case, (3.10) reduces to

$$E[x_i x_j x_k x_l] = \varkappa_4 V_4(i,j,k,l) + \varkappa_2^2[V_2(i,j)\,V_2(k,l) +$$
$$+ V_2(i,k)\,V_2(j,l) + V_2(i,l)\,V_2(j,k)].$$

As a trivial instance of (3.10), we find

$$R_k = E(x_t x_{t+k}) = \varkappa_2 V_2(t,t+k) = \varkappa_2 V_2(0,k) = \varkappa_2 \sum_{i=0}^{\infty} h_i h_{i+k}. \quad (3.11)$$

For larger values of r, the formula given by (3.10) becomes increasingly complicated. For instance, when $r=6$, beside the term

$$\varkappa_6 V_6[i(1), i(2), i(3), i(4), i(5), i(6)],$$

there are 15 terms of the type of

$$\varkappa_4 \varkappa_2 V_4[i(1), i(2), i(3), i(4)] V_2[i(5), i(6)],$$

10 terms of the type of

$$\varkappa_3^2 V_3[i(1), i(2), i(3)] V_3[i(4), i(5), i(6)],$$

and 15 terms of the type of

$$\varkappa_2^3 V_2[i(1), i(2)] V_2[i(3), i(4)] V_2[i(5), i(6)].$$

The case of $r = 8$ is discussed in detail in [13].

4. The moments and the distribution of the mean

As a first and rather simple, application of the formula obtained in the preceding section, it is proposed to compute the moments of the mean of the process $\{x_t\}$. We have the following:

Proposition 4.1. If the process $\{x_t\}$ satisfies the conditions of Lemma 2.1, and, if, moreover, the series $\Sigma \mid h_t \mid$ converges, then, making

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} x_t,$$

we have, for any n not exceeding $2Q$,

$$N^{n/2} E(\bar{x}_N^n) = \begin{cases} O(N^{-1/2}) & \text{when } n \text{ is odd;} \\ \dfrac{n!}{(n/2)!\, 2^{n/2}} \left\{ \dfrac{1}{N} \sum_{\alpha, \beta=1}^{N} R_{\alpha-\beta} \right\}^{n/2} + O(1/N) & \text{when } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Proof. Owing to (3.10),

$$N^{n/2} E(\bar{x}_N^n) = N^{-\frac{n}{2}} \sum_{\beta(1), \ldots, \beta(n)=1}^{N} E(x_{\beta(1)} \cdots x_{\beta(n)}) =$$

$$= \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{\beta(1), \ldots, \beta(n)=1}^{N} \sum_{y=1}^{V(n)} \sum_{z=1}^{z_{n,y}} \prod_{u=1}^{m_{n,y}} \prod_{v=1}^{\pi_{n,y}(u)} \varkappa_{p_{n,y}(u)} V_{p_{n,y}(u)} \{\beta[\alpha_{n,y}^{z}(p_{n,y}(u, v) + 1)], \ldots, \beta[\alpha_{n,y}^{z}(p_{n,y}(u, v) + p_{n,y}(u))]\}.$$

However, in the last formula, the first Σ sign can be put after those referring to y and z. Then, for any given y and z, the sum with respect to $\beta(1), \ldots, \beta(n)$ can be represented as a product of $\pi_{n,y}$ sums of which $\pi_{n,y}(1), \ldots, \pi_{n,y}(m_{n,y})$ contain $p_{n,y}(1), \ldots, p_{n,y}(m_{n,y})$ summation variables respectively. It follows easily from (3.1) that no sequence of indices of the h's will repeat itself more than N times in any of the last-mentioned

sums. Thus the factor corresponding to any particular set of values of u and v does not exceed, in absolute value

$$N \varkappa_{p_{n,y}(u)} [\Sigma_{k=0}^{\infty} | h_k |]^{p_{n,y}(u)},$$

and the product of these factors, *i. e.* the whole term corresponding to the given y and z, is dominated by

$$N^{\pi_{n,y} - n/2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} | h_k | \right]^n \prod_{u=1}^{m_{n,y}} | \varkappa_{p_{n,y}(u)}^{\pi_{n,y}(u)} |.$$

Since, for every u, $p_{n,y}(u) \geqslant 2$, we have $\pi_{n,y} \leqslant n/2$. It follows that, when n is odd, each of the terms under consideration is $O(N^{-1/2})$; the number of these terms being independent of N, this proves the first part of (4.1). If n is even, all the terms for which $\pi_{n,y} < n/2$ contribute $O(1/N)$ to $N^{n/2} E(\bar{x}_N^n)$. There are, however, terms for which $\pi_{n,y} = n/2$. Evidently, they can correspond only to $m_{n,y} = 1$, $p_{n,y}(1) = 2$, and each of them contributes

$$\left\{ \frac{1}{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} R_{\alpha-\beta} \right\}^{n/2}$$

to the right-hand side of (4.1); their number being, according to (3.4), $n![2^{n/2}(n/2)!]^{-1}$, this proves the second part of (4.1).

Since the last expression in curly brackets is a partial *Cesàro* sum of the series $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k$, whose absolute convergence follows easily from that of Σh_k, we have the following:

Corollary 4.2. Under the assumptions of Proposition 4.1, if $n \leqslant 2Q$,

$$\lim_{N \to \infty} N^{n/2} E(\bar{x}_N^n) = \begin{cases} 0 & \text{when } n \text{ is odd;} \\ \dfrac{n!}{(n/2)!\, 2^{n/2}} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k \right\}^{n/2} & \text{when } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Thus, in the limit, the moments of $N^{1/2} \bar{x}_N$ are those of a normal distribution. Hence (cf. e. g. [19] or, for a more general form of the theorem, [5]) the following:

Proposition 4.3. If the assumptions of Proposition 4.1 are satisfied with $Q = \infty$, the distribution of $N^{1/2} \bar{x}_N$ tends, as $N \to \infty$, to a normal distribution with zero mean and variance

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k.$$

This proposition was first proved by *P. A. P. Moran* [17] who only assumed that the ε's, beside being independent, had finite fourth moments and were stationary in the strict sense; it was extended to the case when the ε's are allowed to be m-dependent by *P. H. Diananda* [4]. Evidently, however, Proposition 4.1 cannot be deduced from these results without proving, for instance, that all the moments of $N^{1/2}\,\bar{x}_N$ are bounded; on the other hand, it will be seen below (cf. Section 8) how, by a simple device, Proposition 4.3 can be so generalized as to cover the case treated by *Moran*.

5. The univariate moments of the covariance estimators

The most important direct applications of the formula established in Section 3 concern the covariance estimators. In order to stagger the difficulties, the asymptotic values of the univariate moments of the estimator

$$R_{k,N} = N^{-1} \sum_{t=1}^{N} x_t\, x_{t+k} \tag{5.1}$$

of R_k [*Cf.* (3.11)] will be determined first. We have the following:

Theorem 5.1. Under the assumptions of Proposition 4.1, if

$$v_{k,l} = \varkappa_4 \varkappa_2^{-2} R_k R_l + \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (R_q R_{q+k-l} + R_{q+k} R_{q-l}) \quad (k, l = 0, \pm 1, \ldots), \tag{5.2}$$

and if the positive integer n does not exceed Q, then

$$\lim_{N\to\infty} N^{n/2} E(R_{k,N} - R_k)^n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd;} \\ \dfrac{n!}{2^{n/2}\,(n/2)!}\, v_{k,k}^{n/2} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Proof. According to (5.1),

$$E(R_{k,N} - R_k)^n = N^{-n} E[\sum_{t=1}^{N} x_t\, x_{t+k} - N R_k]^n$$

or, after expansion and multiplication by $N^{n/2}$,

$$N^{n/2} E(R_{k,N} - R_k)^n = \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{\beta(1),\ldots,\beta(n)=1}^{N} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} R_k^s \, E(x_{\beta(1)} x_{\beta(1)+k} \cdots x_{\beta(n-s)} x_{\beta(n-s)+k}), \tag{5.4}$$

where in the terms corresponding to $s = n$, the number 1 should be subsituted for the expectation.

A more explicit formula would be obtained if (3.10) were substituted for the expectations in the right-hand side of (5.4). However, without actually writting a thus expanded formula, it can be seen that, when the substitution is carried out, all the terms corresponding to positive values of s are cancelled by some parts of the terms corresponding to $s = 0$.

Indeed, let $i(1), \ldots, i(2n)$ represent the variables $\beta(1), \beta(1)+k, \ldots$ $\ldots, \beta(n), \beta(n)+k$ in that order. In the summand of the right-hand side of (5.4) consider the term corresponding to $s = 0$ and to a system $\mathfrak{P}_{2n,y}$ for which $p_{2n,y}(m_{2n,y})=2$. Such a term can be represented in the following form:

$$\sum_{z=1}^{z_{2n,y}} \prod_{u=1}^{m_{2n,y}-1} \prod_{v=1}^{\pi_{2n,y}(u)} \varkappa_{p_{2n,y}(u)} V_{p_{2n,y}(u)} \{i[\alpha^z_{2n,y}(p_{2n,y}(u,v)+1)], \ldots$$
$$\ldots, i[\alpha^z_{2n,y}(p_{2n,y}(u,v)+p_{2n,y}(u))]\}.$$
$$\prod_{w=1}^{\pi_{2n,y}(m_{2n,y})} \varkappa_2 V_2 \{i[\alpha^z_{2n,y}(p_{2n,y}(m_{2n,y},w)+1),\ i[\alpha^z_{2n,y}(p_{2n,y}(m_{2n,y},w)+2)]\}. \tag{5.5}$$

Given any positive integer q not exceeding $\pi_{2n,y}(m_{2n,y})$, there are $\binom{n}{q}$ ways of allocating pairs of arguments whose difference is k to exactly q of the factors V_2. Hence, in view of (3.11), (5.5) contains exactly $\binom{n}{q}$ terms of the type of

$$R_k^q \sum_z \prod_{u=1}^{m_{2n,y}-1} \prod_{v=1}^{\pi_{2n,y}(u)} \varkappa_{p_{2n,y}(u)} V_{p_{2n,y}(u)} \{i[\alpha^z_{2(n-q),y'}(p_{2n,y}(u,v)+1)], \ldots$$
$$\ldots, i[\alpha^z_{2(n-q),y'}(p_{2n,y}(u,v)+p_{2n,y}(u))]\}. \tag{5.6}$$
$$\prod_{w=1}^{\pi_{2n,y}(m_{2n,y})-q} \varkappa_2 V_2 \{i[\alpha^z_{2(n-q),y}(p_{2n,y'}(m_{2n,y},w)+1)], i[\alpha^z_{2(n-q),y'}(p_{2n,y}(m_{2n,y},w)+2)]\}.$$

Here, the sum is extended, with the exception specified below, to all the values of z determining classes $\mathfrak{A}^z_{2(n-q),y'}$ corresponding to the system $\mathfrak{P}_{2(n-q),y'}$ which is composed of the same p's as $\mathfrak{P}_{2n,y}$, and of π's satisfying

$$\pi_{2(n-q),y'}(u) = \begin{cases} \pi_{2n,y}(u) & \text{if } u < m_{2n,y}; \\ \pi_{2n,y}(u) - q & \text{if } u = m_{2n,y}. \end{cases}$$

(If $\pi_{2n,y}(m_{2n,y}) - q = 0$, the alterations are obvious). The values of z excluded from the summation are those which yield terms containing factors of the type of $V_2(\beta(j), \beta(j)+k)$. More precisely, the values of z

omitted in the sum are those to which there corresponds at least one value of ν satisfying $p_{2n,y}(m_{2n,y}, 1) < 2\nu \leqslant 2(n-q)$ and

$$\left| \alpha^{z}_{2(n-q),y'}(2\nu) - \alpha^{z}_{2(n-q),y'}(2\nu - 1) \right| = k.$$

It should be noted that (5.6) is written under the assumption that, in the relevant permutation whose operator is $\alpha^{z}_{2n,y}$, the pairs of arguments differing by k and allocated to the same V_2 are placed at the end; this evidently, can always be achieved by a suitable choice of the permutations to represent the various classes $\mathfrak{A}^{z}_{2n,y}$. The expression (5.6) itself corresponds to the case when, out of the variables $\beta(1), \ldots, \beta(n)$, those which drop out owing to (3.11) are $\beta(n-q+1), \ldots, \beta(n)$; in the other expressions described as being of the same type, various other sets of q β's disappear in exactly the same way.

Now, taking $1 \leqslant s \leqslant q$, consider, in the respective part of (5.4), as expressed by means of (3.10), the terms corresponding to the system $\mathfrak{P}_{2(n-s),y''}$, composed, again, of the same numbers as $\mathfrak{P}_{2n,y}$, with the only exception of $\pi_{2(n-s),y''}(m_{2n,y})$, which is now equal to $\pi_{2n,y}(m_{2n,y}) - s$ (the alterations being, again, obvious if the last number is equal to 0). By the argument which was used above, we find that, among these terms, $\binom{n-s}{q-s}$ are of the type of (5.6), apart from the factor $(-1)^s \binom{n}{s}$ which is now included in them. In all these expressions of the type of (5.6), the β's form various sets of $n-q$ out of the n variables $\beta(1), \ldots$ $\ldots, \beta(n)$; however, this distinction becomes immaterial when, in (5.4), the sum is taken with respect to these variables, all running from 1 to N.

Since (5.6) contains only $n-q$ of the summation variables, each term repeats itself N^q times. Thus, according to Lemma 2.3, the overall coefficient of (5.6) (summed with respect to $\beta(1), \ldots, \beta(n-q)$ from 1 to N) in (5.4) is

$$N^q \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{n}{s} \binom{n-s}{q-s} = 0.$$

In view of cancellations which have been demonstrated, (5.4), with (3.10) substituted for the expectations, becomes

$$N^{n/2} E(R_{k,N} - R_k)^n =$$

$$= \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{\beta(1),\ldots,\beta(1)=1}^{N} \sum_{y=1}^{\Gamma(2n)} \sum_{z} \prod_{u=1}^{m_{2n,y}} \prod_{v=1}^{\pi_{2n,y}(u)} \varkappa_{p_{2n,y}(u)} V_{p_{2n;y(u)}}$$

$$\{i[\alpha^{z}_{2n,y}(p_{2n,y}(u,v)+1)], \ldots, i[\alpha^{z}_{2n,y}(p_{2n,y}(u,v)+p_{2n,y}(u))]\}, \qquad (5.7)$$

where the summation with respect to z is extended from 1 to $Z_{2n,\,y}$ with the only exception of all the values yielding factors of the type of $V_2[\beta(j), \beta(j) + k]$.

As it was done with a similar expression in Section 4, the sign representing the summation with respect to $\beta(1), \ldots, \beta(n)$ can be put after those referring to y and z, and, for any y and z, we can attempt to factorize the sum with respect to the β's. Now, however, not every V will give rise to a factor of the sum, because each argument $\beta(\nu)$ is associated with the argument $\beta(\nu) + k$, which may appear in another V. Thus each factor must be a product of V's whose subscripts add up to an even number, and whose arguments, put together, form a set in which $\beta(\nu)+k$ appears if, and only if, $\beta(\nu)$ is included in it. In other terms, each factor must depend on a set of β's which do not appear in other factors. However, it should be remembered that terms containing factors like $V_2[\beta(\nu), \beta(\nu) + k]$ have been excluded as a result of the cancellations discussed above.

Thus, in each of the factors under consideration, the sum of the subscripts of the V's (which is nothing else but the degree of the factor in h's) cannot be less than 4. Since the overall sum of these subscripts is always equal to

$$\sum_{u=1}^{m_{2n,\,y}} p_{2n,\,y}(u)\ \pi_{2n,\,y}(u) = 2n,$$

it follows that the number of factors under consideration cannot exceed $n/2$; it will always be assumed that the factorization has been carried as far as possible.

Apart from the appropriate $\varkappa$'s, each factor is a multiple sum of products of h's, and the set of all the sequences of indices of the h's appearing in the various terms of this sum remains invariant when all the β's involved are given the same increment, but is altered when all the increments are not equal; the last conclusion follows from the assumption that the factorization cannot be carried a step further. Hence, by an argument which was used in the proof of Proposition 4.1, it can be seen that if a term of (5.7) can be split into γ factors, its absolute value is smaller than, or equal to

$$N^{\gamma-\frac{n}{2}} \left| \varkappa_{p_{2n,\,y}(1)}^{\pi_{2n,\,y}(1)} \ldots \varkappa_{p_{2n,\,y}(m_{2n,\,y})}^{\pi_{2n,\,y}(m_{2n,\,y})} \right| \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} | h_\nu | \right]^{2n} \tag{5.8}$$

Since it has been shown that necessarily $\gamma \leqslant [n/2]$, in the case of an odd value of n we have $\gamma - n/2 \leqslant -\frac{1}{2}$ so that each term tends

to 0; their number being independent of N, this proves the first part of (5.3).

If n is even, the same argument shows that the terms decomposed into fewer than $n/2$ factors contribute nothing to the right-hand side of (5.3). There remain the terms factorized into exactly $n/2$ sums. Since each factor is of degree at least 4 in the h's, and their product is of degree $2n$, each factor must now be exactly of degree 4, so that it contains two β's.

If the β's involved in the factor under consideration are now denoted by β_1 and β_2, the factor is evidently bound to be of one of the following three shapes:

$$\text{(A)}\quad \varkappa_4\, V_4(\beta_1, \beta_1 + k, \beta_2, \beta_2 + k);$$

$$\text{(B)}\quad \varkappa_2^2\, V_2(\beta_1, \beta_2)\, V_2(\beta_1 + k, \beta_2 + k);$$

$$\text{(C)}\quad \varkappa_2^2\, V_2(\beta_1, \beta_2 + k)\, V_2(\beta_1 + k, \beta_2).$$

If the pairing of the β's is given for the whole product, and if $a + b + c = n/2$, there are $(n/2)!/a!\,b!\,c!$ ways in which a factors of the type of (A), b of the type of (B), and c of that of (C) can be obtained. When the summation with respect to the β's is carried out, the distinction between the individual factors within each of the aforesaid types disappears, and we are left with the following expression:

$$\sum_{a+b+c=n/2} \frac{(n/2)!}{a!\,b!\,c!} \left\{\frac{\varkappa_4}{N} \sum_{\beta_1,\,\beta_2=1}^{N} V_4(\beta_1, \beta_1 + k, \beta_2, \beta_2 + k)\right\}^a \cdot$$

$$\cdot \left\{\frac{\varkappa_2^2}{N} \sum_{\beta_1,\,\beta_2=1}^{N} V_2(\beta_1, \beta_2)\, V_2(\beta_1 + k, \beta_2 + k)\right\}^b \cdot \left\{\frac{\varkappa_2^2}{N} \sum_{\beta_1,\,\beta_2=1}^{N} V_2(\beta_1, \beta_2 + k) V_2(\beta_1 + \right.$$

$$\left. + k, \beta_2)\right\}^c = \left\{\frac{1}{N} \sum_{\beta_1,\,\beta_2=1}^{n} [\varkappa_4\, V_4(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2 + k, 0, k) + R^2_{\beta_1-\beta_2} + \right.$$

$$\left. + R_{\beta_1-\beta_2-k}\, R_{\beta_1-\beta_2+k}]\right\}^{n/2}. \qquad (5.9)$$

Here, the term in curly brackets is a partial *Cesàro* sum of the convergent series

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} [\varkappa_4\, V_4(q, q + k, 0, k) + R_q^2 + R_{q-k}\, R_{q+k}] =$$

$$= \varkappa_4 \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} h_{q-v}\, h_{q+k-v}\, h_{-v}\, h_{k-v} + \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (R_q^2 + R_{q+k}\, R_{q-k}) =$$

$$= \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_k^2 + \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (R_q^2 + R_{q-k}\, R_{q+k}) = v_{k,k}.$$

Thus (5.9) tends to $v_{k,k}^{n/2}$ with $N \to \infty$. But this is the contribution to (5.7) of the set of terms corresponding to any given grouping of the variables $\beta(1), \ldots, \beta(n)$ into $n/2$ pairs. Clearly, there are $n!/[(n/2)!\, 2^{n/2}]$ such groupings. Hence the proof of the second part of (5.3), and with it that of the whole theorem, is complete.

6. The mixed moments of the covariance estimators

Now it is not particularly difficult to extend the argument of the preceding section to the mixed moments of the covariance estimators. For the sake of brevity, the summation variable and its limits will be omitted in the summation sign whenever the variable is denoted by ν; this variable will be understood to run from 1 to a number denoted by l. The same convention will apply to products. Furthermore, Σ'' will stand for $\Sigma_{\nu=1}^{l}\ \Sigma_{\mu=1}^{\nu-1}$, and, similarly, Π'' for $\Pi_{\nu=1}^{l}\ \Pi_{\mu=1}^{\nu-1}$.

Theorem 6.1. Under the assumptions of Proposition 4.1, if, moreover, $\lambda(1), \ldots, \lambda(l)$ are positive integers such that $\lambda(1) + \ldots + \lambda(l) = n \leqslant Q$, and if $\mathfrak{B}_x$ $(x=1, \ldots, X)$ are all the systems of nonnegative integers $m_{\nu,\mu}^{(x)}$ $(\nu = 1, \ldots, l;\ \mu = 1, \ldots, \nu)$ satisfying

$$2\, m_{\nu,\nu}^{(x)} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} m_{\nu,\mu}^{(x)} + \sum_{\mu=\nu+1}^{l} m_{\mu,\nu} = \lambda(\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, l;\ x=1, \ldots, X), \tag{6.1}$$

then, for any system of pairwise distinct integers $k(1), \ldots, k(l)$,

$$\begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} N^{n/2}\, E[\Pi(R_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)})^{\lambda(\nu)}] = \\ = \dfrac{\Pi\, \lambda(\nu)!}{2^{n/2}} \sum\limits_{x=1}^{X} \dfrac{\Pi\, v_{k(\nu),k(\nu)}^{m_{\nu,\nu}^{(x)}}\, \Pi''(2\, v_{k(\nu),k(\mu)})^{m_{\nu,\mu}^{(x)}}}{\Pi\, m_{\nu,\nu}^{(x)}!\, \Pi''\, m_{\nu,\mu}^{(x)}!} & \text{if } n \text{ is even;} \\ \lim\limits_{N\to\infty} N^{n/2}\, E[\Pi(R_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)})^{\lambda(\nu)}] = 0 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \tag{6.2}$$

Proof. Similarly to (5.4), and assuming $k(1), \ldots, k(l) \geqslant 0$, which is legitimate since $v_{k,l} = v_{|k|,|l|}$,

$$N^{n/2}\, E[\Pi(R_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)})^{\lambda(\nu)}] =$$

$$= N^{-\frac{n}{2}}\, E\{\Pi[\sum_{s=0}^{\lambda(\nu)} (-1)^s \binom{\lambda(\nu)}{s} R_{k(\nu)}^{s} N^s (\sum_{\beta=1}^{N} x_\beta\, x_{\beta+k(\nu)})^{\lambda(\nu)-s}]\} =$$

$$= N^{-\frac{n}{2}} \sum_{\beta(1),\ldots,\beta(n)=1}^{N} \sum_{s(1)=0}^{\lambda(1)} \ldots \sum_{s(l)=0}^{\lambda(l)} (-1)^s\, \Pi \binom{\lambda(\nu)}{s(\nu)} R_{k(\nu)}^{s(\nu)} \tag{6.3}$$

$$E[\Pi \prod_{\alpha=1}^{\lambda(\nu)-s(\nu)} x_{\beta(\lambda(\nu,\alpha))}\, x_{\beta(\lambda(\nu,\alpha))+k(\nu)}],$$

where $s = \Sigma s(\nu)$, and

$$\lambda(\nu, \alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{if } \nu = 1 \\ \sum_{i=1}^{\nu-1} \lambda(i) + \alpha & \text{if } \nu = 2, \ldots, l \end{cases} \quad (\alpha = 1, \ldots, \lambda(\nu);\ \nu = 1, \ldots, l).$$

Without actually substituting (3.10) in (6.3), it can be seen that the terms corresponding to $s > 0$ cancel out with some parts of the term corresponding to $s = 0$.

Indeed, let $i(1), \ldots, i(2n)$ represent the variables $\beta(1), \beta(1) + k(1); \ldots$ $\ldots, \beta(\lambda(1)), \beta(\lambda(1)) + k(1), \ldots, \beta(\lambda(l, 1)), \beta(\lambda(l, 1)) + k(l), \ldots, \beta(n), \beta(n) + k(l)$ in that order. In the right-hand side of (6.3), with (3.10) substituted for the expectation, consider the term corresponding to $s=0$ and to a system $\mathfrak{P}_{2n, y}$ in which $p_{2n, y}(m_{2n, y}) = 2$. Such a term can still be represented in the form of (5.5). Given any set of nonnegative integers $q(1), \ldots, q(l)$ satisfying $0 < q = \Sigma q(\nu) \leqslant \pi_{2n, y}(m_{2n, y})$ and $q(1) \leqslant \lambda(1), \ldots, q(l) \leqslant \lambda(l)$, there are

$$\binom{\lambda(1)}{q(1)} \cdot \binom{\lambda(2)}{q(2)} \cdots \binom{\lambda(l)}{q(l)}$$

ways of allocating exactly $q(1)$ pairs of arguments whose difference is $k(1)$, $q(2)$ pairs whose difference is $k(2)$, etc., $\ldots, q(l)$ pairs whose difference is $k(l)$ to an appropriate number of factors V_2 in (5.5). Hence, in view of (3.11), (5.5) contains exactly $\Pi \binom{\lambda(\nu)}{q(\nu)}$ terms of the type of

$$\Pi R_{k(\nu)}^{q(\nu)} \sum_{z} \prod_{u=1}^{m_{2n, y}} \prod_{v=1}^{\pi_{2n, y}(u)} \varkappa_{p_{2n, y}(u)} V_{p_{2n, y}(u)} \{i[\alpha^z_{2(n-q), y'}(p_{2n, y}(u, v) + 1)], \ldots,$$
$$\ldots, i[\alpha^z_{2(n-q), y'}(p_{2n, y}(u, v) + p_{2n, y}(u))]\}. \qquad (6.4)$$

$$\prod_{w=1}^{\pi_{2n, y}(m_{2n, y})-q} \varkappa_2 V_2\{i[\alpha^z_{2(n-q), y'}(p_{2n, y}(m_{2n, y}, w)+1)], i[\alpha^z_{2(n-q), y'}(p_{2n, y}(m_{2n, y}, w)+2)]\}.$$

The remarks and explanations to (5.6) apply here with the only difference that the values of z omitted in the sum are those which yield factors of any of the types $V_2[\beta(j), \beta(j) + k(\nu)]$ $(\nu = 1, \ldots, l)$.

On the other hand, taking $0 \leqslant s(\nu) \leqslant q(\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, l)$ with $s > 0$, consider, in the respective part of (6.3) as expressed by means of (3.10), the terms corresponding to the system $\mathfrak{P}_{2(n-s), y''}$ defined as in Section 5. By the argument used above, we find that among these terms $\Pi \binom{\lambda(\nu) - s(\nu)}{q(\nu) - s(\nu)}$ are of the type of (6.4), apart from the factor $(-1)^s \Pi \binom{\lambda(\nu)}{s(\nu)}$ which is now included in them. Thus, according to Lemma 2.3, the overall coefficient of (6.4), summed with respect to $\beta(1), \ldots, \beta(n - q)$, in (6.3) is

$$N^q \sum_{s(1)=0}^{q(1)} \cdots \sum_{s(l)=0}^{q(l)} \Pi (-1)^s \binom{\lambda(\nu)}{s(\nu)} \binom{\lambda(\nu)-s(\nu)}{q(\nu)-s(\nu)} = N^q \Pi \Big\{ \sum_{s(\nu)=0}^{q(\nu)} (-1)^{s(\nu)} \binom{\lambda(\nu)}{s(\nu)} \binom{\lambda(\nu)-s(\nu)}{q(\nu)-s(\nu)} \Big\} = 0.$$

In view of these cancellations, (6.3) can again be expressed by the right-hand side of (5.7), where the summation with respect to z is extended to all its possible values with the only exception of those which yield factors of the type of $V_2[\beta(j), \beta(j) + k(\nu)]$. The general remarks made about the factorization of (5.7) in Section 5 still apply. In particular, all the terms which cannot be decomposed into $n/2$ factors tend to 0 with $N \to \infty$. Thus in the case of an odd value of n the theorem is proved, while in that of an even value we need to consider only terms composed of $n/2$ factors each of which is of degree 4 in the h's.

As before, two β's are paired in each factor. If these are denoted by β_1, and β_2, the factor must evidently belong to one of the $3\,l(l+1)/2$ following types:

$$(A_{\nu,\mu}) \quad \varkappa_4 V_4[\beta_1, \beta_1 + k(\nu), \beta_2, \beta_2 + k(\mu)]$$

$$(B_{\nu,\mu}) \quad \varkappa_2^2 V_2(\beta_1, \beta_2) V_2[\beta_1 + k(\nu), \beta_2 + k(\mu)]$$

$$(C_{\nu,\mu}) \quad \varkappa_2^2 V_2[\beta_1, \beta_2 + k(\nu)] V_2[\beta_1 + k(\mu), \beta_2].$$

If the pairing of the β's is given for the whole product, it is easy to see that, after summation, the factors corresponding to a given pair of indices, again denoted by $(\beta_1 \beta_2)$, can be grouped together as a factor of the whole sum; this factor, divided by N, is equal to

$$\frac{1}{N} \sum_{\beta_1, \beta_2=1}^{N} \{\varkappa_4 V_4[\beta_1, \beta_1 + k(\nu), \beta_2, \beta_2 + k(\mu)] + \varkappa_2^2 V_2(\beta_1, \beta_2) V_2[\beta_1 + k(\nu), \beta_2 + k(\mu)] +$$

$$+ \varkappa_2^2 V_2[\beta_1, \beta_2 + k(\mu)] V_2[\beta_1 + k(\nu), \beta_2] = \tag{6.5}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{q=1-N}^{N-1} (N - |q|) \{\varkappa_4 V_4[q, q + k(\nu), 0, k(\mu)] + R_q R_{q+k(\nu)-k(\mu)} +$$

$$+ R_{q+k(\nu)} R_{q-k(\mu)}\},$$

which is easily shown to be a partial *Cesàro* sum of a series whose sum is $v_{k(\nu),k(\mu)}$. Thus, in the limit, (6.3) reduces to a sum of products like

$$\Pi\, v_{k(\nu),k(\nu)}^{m_{\nu,\nu}^{(x)}} \quad \Pi''\, v_{k(\nu),k(\mu)}^{m_{\nu,\mu}^{(x)}} \tag{6.6}$$

The factor $N^{-n/2}$ appearing in the right-hand side of (6.3) has been absorbed by the $n/2$ factors. Since, for any ν, $v_{k(\nu),k(\nu)}$ was obtained from a factor containing two β's associated with $k(\nu)$, while $v_{k(\nu),k(\mu)}$ with $\mu \neq \nu$ was obtained from a factor containing exactly one such variable, (6.1) necessarily holds.

The numerical coefficient with which any product of the type of (6.6) appears in (6.3) is the number of ways in which the β's can be so paired as to yield the particular product under consideration. More explicitly, it is the number of ways in which:

$m_{1,1}^{(x)}$ pairs can be formed with the variables $\beta(1), \ldots, \beta(\lambda(1))$ and, of the remaining $\lambda(1) - 2\, m_{1,1}^{(x)}$ variables $m_{2,1}^{(x)}$ can be allocated to factors yielding $v_{k(2),\, k(1)}$, etc., $\ldots$, $m_{l,1}^{(x)}$ variables can be allocated to factors yielding $v_{k(l),\, k(1)}$;

etc. $\ldots$;

$m_{l,l}^{(x)}$ pairs can be formed with $\beta(\lambda(l, 1)), \ldots, \beta(n)$, and of the remaining $\lambda(l) - 2\, m_{l,l}^{(x)}$ variables $m_{l,1}^{(x)}$ can be allocated to factors yielding $v_{k(l),\, k(1)}$, etc. $\ldots$, $m_{l,l-1}^{(x)}$ can be allocated to factors yielding $v_{k(l),\, k(l-1)}$;

and, finally, the pairing of the variables allocated to each type of factor $v_{k(\nu),\, k(\mu)}$ with $\nu \neq \mu$ can be effected.

This number of ways is, clearly,

$$\frac{\Pi\, \lambda(\nu)!\, \Pi''\, m_{\nu,\mu}^{(x)}!}{2^{\Sigma\, m_{\nu,\nu}^{(x)}}\, \Pi\, m_{\nu,\nu}^{(x)}!\, [\Pi''\, m_{\nu,\mu}^{(x)}!]^2} = \frac{\Pi\, \lambda(\nu)!}{2^{\Sigma\, m_{\nu,\nu}^{(x)}}\, \Pi\, m_{\nu,\nu}^{(x)}!\, \Pi''\, m_{\nu,\mu}!} =$$

$$= \frac{\Pi\, \lambda(\nu)!\, 2^{\Sigma''\, m_{\nu,\mu}^{(x)}}}{2^{n/2}\, \Pi\, m_{\nu,\nu}^{(x)}!\, \Pi''\, m_{\nu,\mu}!}.$$

The last transformation is based on the identity

$$2\, \Sigma\, m_{\nu,\nu}^{(x)} + 2\, \Sigma''\, m_{\nu,\mu}^{(x)} = \Sigma\, \lambda(\nu) = n \qquad (x = 1, \ldots, X),$$

obtained from (6.1) by taking the sum with respect to ν and observing that each $m_{\nu,\mu}^{(x)}$ with $\nu \neq \mu$ occurs in two different equations. Multiplying (6.6) by the coefficient now obtained, and taking the sum with respect to x, we obtain the right-hand side of (6.2) for even values of n. Hence the proof is complete.

If a sample of size, say, N is given, the estimators $R_{k,\,N}$ cannot be formed, and, instead of the estimators $R_{k(\nu),\, N - \max k(\nu)}$, to which the last theorem could be applied, one is rather inclined to use the set of estimators given by

$$C_{k(\nu),\,N} = R_{|\,k(\nu)\,|,\, N - |k(\nu)|} = \frac{1}{N - |\,k(\nu)\,|} \sum_{t=1}^{N - |k(\nu)|} x_t\, x_{t+|k(\nu)|} \tag{6.7}$$

It will be seen that, for any fixed values of $k(1), \ldots, k(l)$, Theorem 6.1 applies to the new set of estimators as well. This will be deduced from the following proposition, which gives expressions for the mixed moments of $C_{k(1),\,N}, \ldots, C_{k(l),\,N}$ valid for finite values of N.

Theorem 6.2. Under the assumptions of Theorem 6.1 and in terms of the notations introduced therein, if, moreover,

$$(N - |k|)^{1/2}(N - |l|)^{1/2} v_{k,l,N} =$$
$$= \sum_{\beta_1=1}^{N-|k|} \sum_{\beta_2=1}^{N-|l|} \{\varkappa_4 V_4(\beta_1, \beta_1 + |k|, \beta_2, \beta_2 + |l|) +$$
$$+ R_{\beta_1-\beta_2} R_{\beta_1-\beta_2+|k|-|l|} + R_{\beta_1-\beta_2-|k|} R_{\beta_1-\beta_2+|l|}\}, \tag{6.8}$$

we have

$$\Pi(N - |k(\nu)|)^{\lambda(\nu)/2} E\{\Pi(C_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)})^{\lambda(\nu)}\} =$$
$$= \sum_{x=1}^{X} \frac{\Pi \lambda(\nu)!}{2^{n/2}} \cdot \frac{\Pi v_{k(\nu),k(\nu),N}^{m_{\nu,\nu}^{(x)}} \Pi'' (2 v_{k(\nu),k(\mu),N})^{m_{\nu,\mu}^{(x)}}}{\Pi m_{\nu,\nu}^{(x)}! \Pi'' m_{\nu,\mu}^{(x)}!} +$$
$$+ O\{(N - \max_{1 \le \nu \le |l|} |k(\nu)|)^{-1}\}$$

when n is even, and

$$\Pi(N - |k(\nu)|)^{\lambda(\nu)/2} E\{\Pi(C_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)})^{\lambda(\nu)}\} = O\{(N - \max_{1 \le \nu \le |l|} |k(\nu)|)^{-1/2}\}$$

when n is odd.

Proof. The argument used in the proof of Theorem 6.1 to determine the cancellations in (6.3) still applies, the only difference being that, for any ν, the sum with respect to the variables $\beta(\lambda(\nu, 1)), \ldots, \beta(\lambda(\nu, \lambda(\nu)))$ is now taken from 1 to $N - |k(\nu)|$ instead of N. The factors of degree 4 in the h's are now, obviously, $v_{k(\nu),k(\mu),N}$ instead of (6.5).

There remain to be considered, in what would correspond to the right-hand side of (6.3), the terms containing factors whose degree in the h's exceeds 4. If such a factor contains the variables $\beta(i_1), \ldots, \beta(i_\theta)$ running from 1 to $N - |k(\nu_1)|, \ldots, N - |k(\nu_\theta)|$ respectively, no sequence of indices of the h's can repeat itself more than $N - \max[|k(\nu_1)|, \ldots, |k(\nu_\theta)|]$ times in the sum. Thus the absolute value of the sum does not exceed this number multiplied by $[|h_0| + |h_1| + \ldots]^{2\theta}$. It has to be divided by $\{[N - |k(\nu_1)|] \ldots [N - |k(\nu_\theta)|]\}^{1/2}$, and the quotient will not decrease if this number is replaced by $\{N - \max[|k(\nu_1)|, \ldots, |k(\nu_\theta)|]\}^{\theta/2}$, leaving us with

$$[\sum_{t=0}^{\infty} |h_t|]^{2\theta} [N - \max_{1 \le i \le \theta} |k(\nu_i)|]^{1-\theta/2} \leqslant [\sum_{t=0}^{\infty} |h_t|]^{2\theta} [N - \max_{1 \le \nu \le l} |k(\nu)|]^{1-\theta/2}.$$

This immediately proves the theorem when n is odd. If n is even, any of the products under consideration contains either a factor with

$0 \geqslant 4$ or at least two factors with $0 \geqslant 3$; in both cases, the product, after taking the sum with respect to the β's, is dominated by

$$[\sum_{t=0}^{\infty} | h_t |]^{2n} [N - \max_{1 \leq \nu \leq l} | k(\nu) |]^{-1}.$$

Hence the proof is complete.

Remark 6.3. If the series $\sum_{t=0}^{\infty} | h_t |$ converges, then, for every k and l,

$$\lim_{N \to \infty} v_{k,l,N} = v_{k,l}. \tag{6.9}$$

Proof. Clearly, we can assume $|k| \geqslant |l|$, and the limit will remain unaltered if the factor in front of the double sum in (6.8) is replaced by $(N - | k |)^{-1}$. The difference between the altered expression and $v_{k,l}$ will not decrease if, in both, the terms of the summands are replaced by their absolute values and, further, if, in the former, both sums are taken from 1 to $N - | k |$. But this will be the difference between a convergent series and its partial *Cesàro* sum, and, therefore, it will tend to 0.

Corollary 6.4. Theorem 6.1 still holds if the estimators $C_{k(\nu),N}$ defined by (6.7), are substituted for $R_{k(\nu),N}$.

7. The asymptotic distribution of the covariance estimators

The moments of the multivariate normal distribution with zero means defined by a covariance matrix $|| v_{k(\nu),k(\mu)} ||$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots, l)$ can easily be deduced from the corresponding moment-generating function, which is known to be

$$M(t_1, \ldots, t_l) = \exp \{ \tfrac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{l} v_{k(\nu),k(\mu)} t_\nu t_\mu \} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{2^s} (\sum_{\nu,\mu=1}^{l} v_{k(\nu),k(\mu)} t_\nu t_\mu)^s,$$

and, therefore, can be expressed, in terms of the notations introduced at the beginning of the preceding section, as follows:

$$M(t_1, \ldots, t_l) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{2^s} (\sum v_{k(\nu),k(\nu)} t_\nu^2 + 2 \sum'' v_{k(\nu),k(\mu)} t_\nu t_\mu)^s;$$

the moment $\mu_{\lambda(1),\ldots,\lambda(l)}$ is found to be equal to the right-hand side of (6.2). Thus the limits of the moments of the covariance estimators treated in Section 6 are the corresponding moments of a multivariate normal distribution.

As pointed out in Section 4, it is well known that if the moments of a sequence of univariate distributions tend to those of a normal distribution, the sequence of distributions tends to this normal distribution. We were unable to find, in the literature of the subject, a convincing proof of the corresponding theorem for multivariate distributions. However, the multivariate case can be reduced to the univariate by means of the following proposition which will also be useful later on, and the extremely simple proof of which is based on an argument akin to that introduced in an early paper by *Cramér* and *Wold* [3]:

Proposition 7.1. The distribution of the multidimensional random variable $\mathbf{x}^{(N)} = (x_1^{(N)}, \ldots, x_l^{(N)})$ $(N = 1, 2, \ldots)$ tends, with $N \to \infty$, to that of the random variable $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_l)$ if, and only if, for any determinate vector $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l)$, the distribution of the random variable $\mathbf{t}' \mathbf{x}^{(N)} = t x_1^{(N)} + \ldots + t_l x_l^{(N)}$ tends to that of $\mathbf{t}' . \mathbf{x}$ as $N \to \infty$.

Proof. It follows from the well-known properties of the characteristic function (Cf. e. g. *Cramér* [2]) that the following statements are equivalent: (i) The distribution of $\mathbf{x}^{(N)}$ tends to that of $\mathbf{x}$ with $N \to \infty$; (ii) For any determinate vector $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l)$, the characteristic function $E\{\exp(i t_1 x_1^{(N)} + \ldots + i t_l x_l^{(N)})\}$ tends to $E\{\exp(i t_1 x_1 + \ldots + i t_l x_l)\}$ as $N \to \infty$; (iii) For any determinate vector $\mathbf{t}$ and any scalar τ, $\lim_{N \to \infty} E\{(\exp(i \tau t_1 x_1^{(N)} + \ldots + i \tau t_l x_l^{(N)})\} = E\{\exp(i \tau t_1 x_1 + \ldots + i \tau t_l x_l)\}$; (iv) For any determinate vector $\mathbf{t}$, the characteristic function of $\mathbf{t}' . \mathbf{x}^{(N)}$ tends to that of $\mathbf{t}' . \mathbf{x}$ everywhere with $N \to \infty$; (v) For any determinate vector t, the distribution of the random variable $\mathbf{t}' . \mathbf{x}^{(N)}$ tends to that of $\mathbf{t}' . \mathbf{x}$.

Corollary 7.2. If all the moments of a sequence of multivariate probability distributions tend to the corresponding moments of a given normal multivariate distribution, this sequence of distributions tends to the aforesaid normal distribution.

In view of what was said of the moments of a normal multivariate distribution, we obtain, therefore, as an immediate consequence of Theorem 6.1 and Corollary 6.4, the following:

Proposition 7.3. If the ε's are identically and independently distributed with finite moments of every order, the series $\sum_{k=0}^{\infty} |h_k|$ being convergent, then, for any set of integers $k(1), \ldots, k(l)$, the joint distribution of random variables

$$N^{1/2}\,(R_{k(\nu),\,N} - R_{k(\nu)}) \qquad (\nu = 1, \ldots, l)$$

tends, with $N \to \infty$, to the multivariate normal distribution with zero means determined by the covariance matrix

$$\| v_{k(\nu),\,k(\mu)} \| \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, l),$$

and so does the joint distribution of

$$N^{1/2}\,(C_{k(\nu),\,N} - R_{k(\nu)}) \qquad (\nu = 1, \ldots, l).$$

8. The case when the existence of higher moments is not assumed

The results obtained in Sections 4 and 7 and concerning asymptotic distributions can be extended to cases when only limited numbers of moments of the ε's are postulated. This will be achieved by means of the following device, which is an elaboration of an idea introduced in a previous paper [14a] to deal with a slightly simpler situation.

Assuming, in any case, that $\{\varepsilon_t\}$ is stationary in the strict sense with $E(\varepsilon_t) = 0$ and $E(\varepsilon_t^2)$ finite, the ε's being independent, let $\{a_N\}$, $\{b_N\}$, $\{c_N\}$, and $\{d_N\}$ be four numerical sequences satisfying the following conditions:

(i) $0 \leqslant c_N \leqslant 1$; $0 \leqslant d_N \leqslant 1$; $|a_N|$, $|b_N| \leqslant \log N$ $(N = 1, 2, \ldots)$.

(ii) When $N \to \infty$, a_N tends to the lower bound of the distribution of the ε's, and b_N tends to its upper bound. (Evidently, apart from the trivial case when all the moments are finite, at least one of these bounds is infinite).

(iii) $$c_N\,a_N\,P[\varepsilon_t = a_N] + \lim_{a > a_N + 0} \int_a^{b_N} \varepsilon\,d\,F(\varepsilon) + d_N\,b_N\,P[\varepsilon_t = b_N] = 0$$
$$(N = 1, 2, \ldots),$$

where $F(\varepsilon)$ is the probability distribution function of the ε's. If this function is continuous everywhere, obviously the sequences $\{c_N\}$ and $\{d_N\}$ can be discarded; otherwise, however, they are essential. It is easy to see how the four sequences can be formed.

Moreover, two auxiliary families of random variables, say $\theta_{t,\,N}$ and $\tau_{t,\,N}$, depending on the integral-valued parameters t and $N (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; N = 1, 2, \ldots)$ are needed. It will be assumed that these new random variables take no values other than 0 and 1, with

$$P[\theta_{t,\,N} = 1] = c_N \qquad P[\tau_{t,\,N} = 1] = d_N \qquad (N = 1, 2, \ldots),$$

and that, together with the ε's, they form a set of independent random

variables. Clearly, there is no difficulty in assuming that our universe includes such random variables, or, alternatively, in extending it in an appropriate manner.

Now, let

$$\eta_{t,N} = \begin{cases} 0 & \text{if } \varepsilon_t < a_N \text{ or } \varepsilon_t > b_N; \\ \theta_{t,N}\ \varepsilon_t & \text{if } \varepsilon_t = a_N; \\ \varepsilon_t & \text{if } a_N < \varepsilon_t < b_N; \\ \tau_{t,N}\ \varepsilon_t & \text{if } \varepsilon_t = b_N; \end{cases}$$

and define $\zeta_{t,N}$ by

$$\varepsilon_t = \eta_{t,N} + \zeta_{t,N} \tag{8.1}$$

It follows from these definitions that, for any value of N, $\{\eta_{t,N}\}$ and $\{\zeta_{t,N}\}$ are strictly stationary processes, that each of them forms a set of independent random variables, that

$$E(\eta_{t,N}) = E(\zeta_{t,N}) = 0 \tag{8.2}$$

and that, for any m for which $E(\,|\,\varepsilon_t\,|^m)$ is finite,

$$E(\varepsilon_t^m) = E(\eta_{t,N}^m) + E(\zeta_{t,N}^m) \tag{8.3}$$

with

$$\lim_{N\to\infty} E(\eta_{t,N}^m) = E(\varepsilon_t^m) = \mu_m \text{ and } \lim_{N\to\infty} E(\zeta_{t,N}^m) = 0. \tag{8.4}$$

Since $|\,\eta_{t,N}\,| \leqslant \log N$ identically,

$$|\,E(\eta_{t,N}^r)\,| \leqslant (\log N)^r \tag{8.5}$$

for any N and any positive r. It follows easily that the cumulant of order r of $\eta_{t,N}$ is also $O[(\log N)^r]$. Finally, let

$$y_{t,N} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} h_{t-q}\,\eta_{q,N} \qquad z_{t,N} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} h_{t-q}\,\zeta_{q,N};$$

then, for every t and N,

$$x_t = y_{t,N} + z_{t,N}; \qquad E(y_{t,N}) = E(z_{t,N}) = 0.$$

As a first, and particularly simple, application of these concepts, it is proposed to show how the previously mentioned result of *Moran* [17] can be derived from the arguments of Section 4. If

$$\bar{y}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y_{t,N} \qquad \bar{z}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} z_{t,N}$$

so that $\bar{x}_N = \bar{y}_N + \bar{z}_N$, these arguments apply to $\bar{y}_N$ with the following modification: In the main term of the right-hand side of (4.1), which corresponds to $\pi_{n,y} = n/2$, the variance $\varkappa_2 = \mu_2$ of ε_t has to be replaced

by $E(\eta_{t,N}^2)$, which, however, does not matter in the limit owing to (8.4) with $m = 2$. In the remaining terms, the higher cumulants of ε_t have to be replaced by those of $\eta_{t,N}$, so that the sum of these terms becomes now $O\{N^{-\alpha}(\log N)^n\}$ instead of $O(N^{-\alpha})$ (with $\alpha = \frac{1}{2}$ if n is odd and $\alpha = 1$ if n is even), but still tends to 0. Hence Proposition 4.1, and therefore, also Proposition 4.3, applies to $\bar{y}_N$.

On the other hand, it can easily be deduced from (8.4) with $m=2$ that

$$\operatorname*{p\,lim}_{N\to\infty} N^{\frac{1}{2}}\,\bar{z}_N = 0.$$

Consequently (Cf. e. g. *Cramér* [2], Section 20.6), the distribution of $N^{\frac{1}{2}}\,\bar{x}_N$ tends to the same limit as that of $N^{\frac{1}{2}}\,y_N$, *i. e.* to a normal distribution with zero mean and variance $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k$. It may be worth noting that there would be no particular difficulty in generalizing this kind of argument so as to cover the case when $\{\varepsilon_t\}$ is only assumed to be stationary in the wide sense with collectively bounded absolute third moments, and this would go beyond what is obtainable on the basis of a generalized *Lindeberg-Lévy* Theorem.

When considering the covariance estimators, obviously we must assume that $E(\varepsilon_t^4)$ is finite, since otherwise the expressions for the covariances of the asymptotic distribution of these estimators would become meaningless; we have the following:

Theorem 8.1. If the series $\Sigma|h_t|$ converges and if $\{\varepsilon_t\}$ is stationary in the strict sense with finite fourth moments, the ε's being independent and having zero means, then, for any fixed set of integers $k(1), \ldots, k(l)$, the limiting distribution of each of the two sets of random variables

$$N^{\frac{1}{2}}(C_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)}) \quad (\nu = l, \ldots l) \quad \text{and} \quad N^{\frac{1}{2}}(R_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)}) \quad (\nu = 1, \ldots, l)$$

when $N \to \infty$ is normal with a covariance matrix

$$\| v_{k(\nu),k(\mu)} \| \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, l).$$

Proof. The argument being very much the same for either set of estimators of $R_{k(\nu)}$, it suffices to consider the first set. Clearly,

$$C_{k(\nu),N} = C^{(1)}_{k(\nu),N} + C^{(2)}_{k(\nu),N} + C^{(3)}_{k(\nu),N} + C^{(4)}_{k(\nu),N} \qquad (\nu = 1, \ldots, l) \qquad (8.6)$$

where

$$C^{(1)}_{k(\nu),N} = \frac{1}{N - |k(\nu)|} \sum_{t=1}^{N-|k(\nu)|} y_t\, y_{t+|k(\nu)|}\,; \quad C^{(2)}_{k(\nu),N} = \frac{1}{N - |k(\nu)|} \sum_{t=1}^{N-|k(\nu)|} y_t\, z_{t+|k(\nu)|}\,;$$

$$C^{(3)}_{k(\nu),N} = \frac{1}{N - |k(\nu)|} \sum_{t=1}^{N-|k(\nu)|} z_t\, y_{t+|k(\nu)|}\,; \quad C^{(4)}_{k(\nu),N} = \frac{1}{N - |k(\nu)|} \sum_{t=1}^{N-|k(\nu)|} z_t\, z_{t+|k(\nu)|}\,.$$

It will be seen, in the first place, that the random variables

$$N^{1/2}[C^{(1)}_{k(\nu),N} - E(C^{(1)}_{k(\nu),N})] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l) \tag{8.7}$$

have, in the limit, the joint distribution described above. The moments of these random variables can be computed in the same way as those of $N^{1/2}[C_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)}]$ $(\nu = 1, \ldots, l)$ in Section 6. The cancellations demonstrated there are not affected by the substitution of $\{\eta_{t,N}\}$ for $\{\varepsilon_t\}$. In view of (8.4), now applying to $m = 1, 2, 3, 4$, the terms appearing in the right-hand side of the formula in Theorem 6.2 are, in the limit, also unaffected by this substitution. There remain to be considered the terms tending to 0, which in the case of Theorem 6.2 are $O(N^{-1})$ when n is even and $O(N^{-1/2})$ when n is odd. The cumulants of order higher than 4, which appear in some of these terms, now are no longer independent of N. However, according to (8.5), any product of cumulants whose orders add up to n is at most $O\{(\log N)^n\}$. Thus the terms which formerly were $O(N^{-1})$ and $O(N^{-1/2})$ now become $O\{N^{-1}(\log N)^n\}$ and $O\{N^{-1/2}(\log N)^n\}$ respectively, and, therefore, still tend to 0 with $N \to \infty$. Hence the moments of (8.7) tend to those of the required multivariate distribution, and, according to Corollary 7.2, it follows that the joint distribution of (8.7) tends to the same distribution.

On the other hand, it is not difficult to prove that either of the two random variables $N^{1/2}\, C^{(i)}_{k(\nu),N}$ $(i = 2, 3)$ tends to 0 in the mean, and all the more in probability, for any $\nu (\nu = 1, \ldots, l)$. Indeed,

$$E(C^{(2)}_{k(\nu),N}) = E(C^{(3)}_{k(\nu),N}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, l;\ N = 1, 2, \ldots) \tag{8.8}$$

since, clearly, $E(\eta_{t,N}\, \zeta_{\tau,N}) = 0$ for any t and τ. But it is easy to verify that

$$E(y_\alpha\, y_\beta\, z_{\alpha+k(\nu)}\, z_{\beta+k(\mu)}) =$$
$$= \{V_2(\alpha,\beta)\, V_2(\alpha+k(\nu),\beta+k(\mu)) - V_4(\alpha,\beta,\alpha+k(\nu),\beta+k(\mu))\} E(\eta^2_{t,N})\, E(\zeta^2_{t,N})$$

and, therefore,

$$\left|E(y_\alpha\, y_\beta\, z_{\alpha+|k(\nu)|}\, z_{\beta+|k(\mu)|})\right| \leqslant \Re_{\alpha-\beta}\, \Re_{\alpha-\beta+|k(\nu)|-k(\mu)|}\, E(\eta^2_{t,N})\, E(\zeta^2_{t,N})\, \varkappa_2^{-2}$$

where

$$\Re_k = \varkappa_2 \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |h_q\, h_{q+k}| \tag{8.9}$$

Hence

$$\left|(N - |k(\nu)|)\, E(C^{(2)}_{k(\nu),N}\, C^{(2)}_{k(\mu),N})\right| \leqslant \varkappa_2^{-2}\, E(\eta^2_{t,N})\, E(\zeta^2_{t,N}) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \Re_q\, \Re_{q+|k(\nu)|-|k(\mu)|}$$
$$(\nu = 1, \ldots, l;\ N = 1, 2, \ldots) \tag{8.10}$$

and similarly it can be seen that the same inequality applies to $E(C^{(3)}_{k(\nu),N}\, C^{(3)}_{k(\mu),N})$. In view of (8.4) and jointly with (8.8), these inequalities, which will be useful also later on, prove our point concerning $C^{(2)}_{k(\nu),N}$ and $C^{(3)}_{k(\nu),N}$ if we make $\mu = \nu$. The variance of $C^{(4)}_{k(\nu),N}$ can be computed in the same way as that of $C_{k(\nu),N}$, but with the substitution of the second and fourth cumulants of $\zeta_{t,N}$ for those of ε_t, so that $\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} C^{(4)}_{k,N} = 0$ and, therefore,

$$\operatorname*{p\,lim}_{N\to\infty} N^{1/2}\,[C^{(4)}_{k(\nu),N} - E(C^{(4)}_{k(\nu),N})] = 0.$$

Now, according to (8.6) and (8.8),

$$N^{1/2}\,[C_{k(\nu),N} - R_{k(\nu)}] = N^{1/2}\,[C^{(1)}_{k(\nu),N} - E(C^{(1)}_{k(\nu),N})] + N^{1/2}\,C^{(2)}_{k(\nu),N} + \\ + N^{1/2}\,C^{(3)}_{k(\nu),N} + N^{1/2}\,[C^{(4)}_{k(\nu),N} - E(C^{(4)}_{k(\nu),N})], \tag{8.11}$$

and, in view of what has been said of the various terms of the right-hand side of this equation, the theorem follows from a proposition given by *Cramér* ([2]; Section 22.6).

Remark 8.2. If an unknown polynomial trend $f_n(t)$ of a degree having a given upper bound is superimposed on a process $\{x_t\}$ satisfying the assumptions of the preceding theorem, the trend can be eliminated from a sample by the method of least squares, and the usual asymptotic formula for the covariances of the covariance estimators still applies to the estimators based on the residuals (cf. [13]; the whole paper was written on the assumption that $E(\varepsilon_t^8)$ was finite, but the proofs of the propositions referred to remain valid when only $E(\varepsilon_t^4)$ is assumed to be finite). The estimator of R_k based on a sample of $x_t + f_n(t)$ can be decomposed into two parts: one formed with the "true" process $\{x_t\}$, and another, denoted by X_k and representing the errors in trend elimination. But it was shown in the proof of Proposition 9 (*loc. cit.*) that, for a constant k, $\operatorname{var} N^{1/2} X_k = O(N^{-1})$, while, according to Proposition 7 (*ibidem*) $E(N^{1/2} X_k) = O(N^{-1/2})$, so that $\operatorname*{p\,lim}_{N\to\infty} N^{1/2} X_k = 0$. In view of this, it follows from the preceding theorem, and from the proposition quoted at the end of its proof, that the covariance estimators, obtained after the trend elimination described above are still jointly asymptotically normally distributed as described in Theorem 8.1. For the sake of brevity, this line of argument will not be pursued any further, but it should be noted that various further results based on Theorem 8.1 can be extended to the case when a polynomial trend has to be eliminated from the sample.

9. The estimators of the autocorrelation function

The asymptotic distribution of various estimators of the autocorrelation function can be deduced from Theorem 8.1 on the basis of the following proposition, which is a perfectly straightforward extension to the multivariate case of a convergence theorem given by *Cramér* ([2]; Cf. Section 20.6):

Proposition 9.1. Let $\{\xi_n\}$ and $\{\eta_n\}$ be two sequences of random vectors with

$$\xi_n = (\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{p,n}) \qquad \eta_n = (\eta_{1,n}, \ldots, \eta_{p,n})$$

If

$$\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} \eta_{i,n} = c_i \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

$c_1, \ldots, c_p$ being arbitrary positive constants, and if the distribution function $F_n(x_1, \ldots, x_p)$ of ξ_n tends to a distribution function $F(x_1, \ldots, x_n)$ at every continuity point of F, then the distribution function of the vector

$$\mathbf{z}_n = (\xi_{1,n}\, \eta_{1,n}, \ldots, \xi_{p,n}\, \eta_{p,n})$$

tends to $F(x_1/c_1, \ldots, x_p/c_p)$ at every continuity point of the last function.

We have the following:

Theorem 9.2. Under the assumptions of Theorem 8.1, if

$$\varrho_k = R_k / R_0, \; r_{k,N} = C_{k,N} / C_{0,N}, \; \gamma_{k,N} = N^{1/2}(r_{k,N} - \varrho_{k,N}) \; (k \geqslant 0),$$

and

$$d_{k,l} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} [\varrho_q \varrho_{q+k-l} + \varrho_{q+k}\varrho_{q-l} - 2\varrho_l \varrho_q \varrho_{q+k} - 2\varrho_k \varrho_q \varrho_{q+l} + 2\varrho_k \varrho_l \varrho_q^2] \tag{9.1}$$

for any k, l and N, the joint distribution of $(\gamma_{k_1,N}, \ldots, \gamma_{k_p,N})$ with any fixed $k_1, \ldots, k_p$ tends, for $N \to \infty$, to the normal distribution with zero means which is determined by a covariance matrix equal to

$$\| d_{k_i,k_j} \| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p). \tag{9.2}$$

The same conclusion applies if, for the estimators $r_{k,N}$ of ϱ_k, we substitute

$$\hat{\varrho}_{k,N} = C_{k,N}\,(A_{k,N}\, B_{k,N})^{-1/2},$$

where

$$A_{k,N} = \frac{1}{N - |k|} \sum_{t=1}^{N-|k|} x_t^2, \quad B_{k,N} = \frac{1}{N - |k|} \sum_{t=|k|+1}^{N} x_t^2$$

Proof. According to Theorem 8.1 and Proposition 7.1, the numerators of

$$\gamma_{k_i,N} = \frac{N^{1/2}(R_0 C_{k_i,N} - R_{k_i} C_{0,N})}{R_0 C_{0,N}} \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

being linear combinations of $C_{k_i,N}$ and $C_{0,N}$, have, for $N \to \infty$, a joint probability distribution which tends to be normal with zero means and with a covariance matrix

$$\| R_0^2 v_{k_i,k_j} - R_0 R_{k_i} v_{0,k_j} - R_0 R_{k_j} v_{0,k_i} + R_{k_i} R_{k_j} v_{0,0} \| \quad (i,j = 1, \ldots, p).$$

Substituting, here, the values given for v_{k_i,k_j} by (5.2) and recalling (9.1), we find that this matrix is nothing else but

$$\| R_0^4 d_{k_i,k_j} \| \qquad (i,j = 1, \ldots, p).$$

On the other hand, clearly,

$$\operatorname{p\,lim}_{N\to\infty} \frac{1}{R_0 C_{0,N}} = \frac{1}{R_0^2}.$$

Hence, owing to Proposition 9.1, the joint probability distribution of $\gamma_{k_1,N}, \ldots, \gamma_{k_p,N}$ tends to the multivariate normal distribution defined in the statement of the theorem.

In the case of the estimators $\hat{\varrho}_{k,N}$, the expressions

$$N^{1/2}(\hat{\varrho}_{k,N} - \varrho_k) = \frac{N^{1/2}(R_0 C_{k,N} - R_k C_{0,N})}{R_0 A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2}} + \frac{N^{1/2} R_k (C_{0,N} - A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2})}{R_0 A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2}} \tag{9.3}$$

have to be substituted for $\gamma_{k,N}$. However, $N^{1/2}(C_{0,N} - A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2})$ is necessarily contained between $N^{1/2}(C_{0,N} - A_{k,N})$ and $N^{1/2}(C_{0,N} - B_{k,N})$. But, for instance

$$N^{1/2}(C_{0,N} - A_{k,N}) = N^{-1/2} \sum_{t=1}^{N} x_t^2 - \frac{N^{1/2}}{N - |k|} \sum_{t=1}^{N-|k|} x_t^2 =$$

$$= N^{-1/2} \sum_{t=N-|k|+1}^{N} x_t^2 - \frac{|k|}{N^{1/2}} \frac{1}{N - |k|} \sum_{t=1}^{N-|k|} x_t^2, \tag{9.4}$$

so that

$$\operatorname{l.i.m.}_{N\to\infty} N^{1/2}(C_{0,N} - A_{k,N}) = \operatorname{l.i.m.}_{N\to\infty} N^{1/2}(C_{0,N} - B_{k,N}) = 0$$

and, therefore,

$$\operatorname{l.i.m.}_{N\to\infty} N^{1/2}(C_{0,N} - A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2}) = 0.$$

Hence

$$\operatorname{p\,lim}_{N\to\infty} \frac{N^{1/2} R_k (C_{0,N} - A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2})}{R_0 A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2}} = 0 \text{ and } \operatorname{p\,lim}_{N\to\infty} \frac{1}{R_0 A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2}} = \frac{1}{R_0^2}.$$

Thus the first term in the right-hand side of (9.3) can be treated exactly like $\gamma_{k,N}$, while the second tends to 0 in probability. Consequently, according to a previously quoted convergence theorem given by *Cramér* ([2]; Cf. Section 22.6), the limiting distribution of (9.3) is the same as that of $\gamma_{k,N}$, which completes the proof.

In the particular case *when the variables of the process are independent*, *i. e.* when $h_1 = h_2 = \ldots = 0$, the asymptotic normality of the correlation estimators was already proved by *Hoeffding* and *Robbins* [9], who postulated, however, the existence of finite *sixth* moments. The restriction concerning the moments was removed by *Diananda* [4], who showed that, *still assuming the independence of the* x's, the proposition remained true if only the second momends were finite. This result could be obtained owing to the fact that, in the case under consideration, $\gamma_{k,N}$ reduces to $N^{1/2} C_{k,N} / C_{0,N}$ and the numerator contains no squares of ε's. In the general case these squares do appear, and even if, in the asymptotic formula for the covariances, $\varkappa_4$ cancels out, it is still there when N is finite, making it at least plausible that the condition of finiteness of the fourth moments of the ε's in Theorem 9.2 is not redundant.

Of course, the preceding theorem in itself gives no information about the moments of $r_{k,N}$ and $\hat{\varrho}_{k,N}$. In this connection, the following proposition is relevant:

Proposition 9.3. If the multivariate distribution function $F_N(x_1, \ldots, x_p)$ tends, with $N \to \infty$, to a distribution function $F(x_1, \ldots, x_p)$ at all the continuity points of the latter and if, for any fixed integer m, all the moments of order $2m$ of the distribution F_N are bounded independently of N, then all the moments of the distribution F_N of orders *lower* than $2m$ tend to the respective moments of the distribution F.

This is a special case of a proposition to be found in [12]. This proposition (*cf.* the corollary on p. 184) is proved, there, only for univariate distributions, but the author rightly points out that exactly the same argument applies to the multivariate case. Hence the following:

Theorem 9.4. Under the assumptions of Theorem 8.1, if, moreover, the ε's have finite moments of order $4m$, where m is an integer, then the random variables $\gamma_{k,N}$ and $N^{1/2}(\hat{\varrho}_{k,N} - \varrho_k)$ have finite moments (univariate and mixed) of every order *lower* than $2m$, and these moments tend, with $N \to \infty$, to the moments of the asymptotic distribution described in Theorem 9.2.

Proof. According to Proposition 9.3, it suffices to prove that the moments of order $2m$ of $\gamma_{k,N}$ and of (9.3) are bounded independently

of N, and owing to the *Hölder* Inequality we can confine ourselves to the univariate moments.

Considering $\gamma_{k,N}$ first, let ϵ be the event $C_{0,N} > R_0/2$ and let $\bar{\epsilon}$ be the complementary event. Owing to the generalized *Bienaymé-Chebyshev* inequality,

$$P[\bar{\epsilon}] \leqslant P[\,|\,C_{0,N} - R_0\,|\,\geqslant R_0/2] \leqslant 2^{2m} R_0^{-2m} E(C_{0,N} - R_0)^{2m}. \quad (9.5)$$

But, according to the *Schwarz* Inequality, $|\,r_{k,N}\,| < N/(N - |\,k\,|)$, and in particular $|\,r_{k,N}\,| \leqslant 2$ whenever $N > 2\,|\,k\,|$, so that

$$|\,\gamma_{k,N}\,| \leqslant 3\,N^{1/2} \text{ whenever } N \geqslant 2\,|\,k\,|.$$

Thus, for sufficiently large values of N,

$$E(\gamma_{k,N}^{2m}) = \int_{\epsilon} \gamma_{k,N}^{2m}\, d\,P + \int_{\bar{\epsilon}} \gamma_{k,N}^{2m}\, d\,P \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2m} N^m R_0^{-1m} E(R_0\, C_{k,N} - R_k\, C_{0,N})^{2m} + 3^{2m} N^m P(\bar{\epsilon}).$$

However, in view of (9.5) and owing to Theorem 5.1, both terms in the last expression are bounded independently of N and so is, therefore, $E(\gamma_{k,N}^{2m})$.

Considering now $\hat{\varrho}_{k,N}$, let ϵ_0 be the event $A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2} > R_0/2$ and $\bar{\epsilon}_0$ the complementary event. Clearly,

$$P[\bar{\epsilon}_0] \leqslant P[\,|\,A_{k,N} - R_0\,| > R_0/2] + P[\,|\,B_{k,N} - R_0\,| > R_0/2] = O(N^{-m}), \quad (9.6)$$

while, owing to the *Schwarz* Inequality, $|\,\hat{\varrho}_{k,N}\,| \leqslant 1$, so that identically.

$$|\,\hat{\varrho}_{k,N} - \varrho_k\,| \leqslant 2 \quad (9.7)$$

Again,

$$N^m E(\hat{\varrho}_{k,N} - \varrho_k)^{2m} = N^m \int_{\epsilon_0} (\hat{\varrho}_{k,N} - \varrho_k)^{2m}\, dP + N^m \int_{\bar{\epsilon}_0} (\hat{\varrho}_{k,N} - \varrho_k)^{2m}\, dP,$$

where the second term is bounded independently of N owing to (9.6) and (9.7). As to the first term, according to (9.3), and in view of the *Minkowski* Inequality, it suffices to show that each of the two expressions

$$N^m \int_{\epsilon_0} \frac{(R_0\, C_{k,N} - R_k\, C_{0,K})^{2m}}{R_0^{2m} A_{k,N}^m B_{k,N}^m}\, d\,P \text{ and } N^m R_k^{2m} \int_{\epsilon_0} \frac{(C_{0,N} - A_{k,N}^{1/2} B_{k,N}^{1/2})^{2m}}{R_0^{2m} A_{k,N}^m B_{k,N}^m}$$

is bounded. But the first does not exceed

$$2^{2m} N^m R_0^{-4m} E(R_0\, C_{k,N} - R_k\, C_{0,N})^{2m},$$

which has been shown to be bounded, while the second, owing to (9.4) can be easily recognised as $O(N^{-m/2})$. Hence $N^m E(\hat{\varrho}_{k,N} - \varrho_k)^{2m}$ is bounded independently of N, and this concludes the proof.

10. Applications to statistical spectral analysis

In terms of the previously adopted notations, the function

$$F'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k \cos 2\pi k\omega \qquad (-\tfrac{1}{2} \leqslant \omega \leqslant \tfrac{1}{2}) \tag{10.1}$$

is called the *complex-form spectral density function* of the process under consideration, while the term *real-form spectral density function* applies to the function $G'(\omega) = 2F'(\omega)$ $(0 \leqslant \omega \leqslant \tfrac{1}{2})$. The indefinite integral

$$G(\omega) = \int_0^{\omega} G'(\lambda)\, d\lambda = 2R_0\omega + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{k} \sin 2\pi k\omega \quad (0 \leqslant \omega \leqslant \tfrac{1}{2}) \tag{10.2}$$

is known as the *spectral distribution function* of the same process.

It is well known that the *periodogram*,

$$I_N(\omega) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \frac{N - |k|}{N} C_{k,N} \cos 2\pi k\omega, \tag{10.3}$$

whose expectation tends to $F'(\omega)$, is, nevertheless, not a consistent estimator of $F'(\omega)$. On the other hand, it is also well known that, for every ω in the interval $[0, \tfrac{1}{2}]$, the *incomplete integral of the periodogram*,

$$\Phi_N(\omega) = \int_0^{\omega} I_N(\lambda)\, d\lambda = C_{0,N}\omega + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-k}{Nk} C_{k,N} \sin 2\pi k\omega \tag{10.4}$$

is a consistent estimator of $\tfrac{1}{2} G(\omega)$ (Cf. [7]). Hence the interest in $\Phi_N(\omega)$, although it should be noted in passing that, regarded as a whole, i. e. as a function of ω, this is not a particularly good estimator of $\tfrac{1}{2} G(\omega)$, because its derivative is not a consistent estimator of $\tfrac{1}{2} G'(\omega) = F'(\omega)$ (For the rationale of the estimation of functions cf. [14]).

Under slightly less restrictive assumptions than those of Theorem 8.1, *Grenander* and *Rosenblatt* [7] proved that, for any λ_0 and μ_0 in the interval $[0, \tfrac{1}{2}]$,

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}\{\Phi_N(\lambda_0), \Phi_N(\mu_0)\} = \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \int_0^{\lambda_0} F'(\lambda)\, d\lambda \int_0^{\mu_0} F'(\mu)\, d\mu + \int_0^{\min(\lambda_0, \mu_0)} [F'(\lambda)]^2\, d\lambda. \tag{10.5}$$

Furthermore, under assumptions which, with respect to both $\{h_t\}$ and $\{\varepsilon_t\}$, were more restrictive than those of Theorem 8.1, they obtained a remarkable result concerning the limiting distribution of

$$\max_{0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} \left| \Phi_N(\omega) - E(\Phi_N(\omega)) \right|,$$

identifying it with that of the greatest absolute value of an auxiliary Gaussian process $\eta(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2})$ (*ibidem*).

However, the limiting joint probability distribution of $\Phi_N(\omega)$ for any finite number of values of the variable ω may be interesting, all the more as the previously mentioned result can be directly applied in practice only in the case when the given process $\{x_t\}$ is Gaussian. *Grenander* and *Rosenblatt* [8] stated in an expository article that this joint distribution was normal in the limit, without, however, specifying the conditions of validity of their assertion. It may, therefore, be worth showing how the approach based on our Sections 6, 7, and 8 makes it easy to prove this statement without making any further assumptions beyond those of our Theorem 8.1. We start with the following:

Proposition 10.1. If the process $\{x_t\}$ satisfies the assumptions of Lemma 2.1, the series $\Sigma \mid h_t \mid$ being convergent, and if $0 \leqslant \omega_i \leqslant \frac{1}{2}$, $(i = 1, \ldots, \theta)$, then the mixed and univariate moments of the random variables

$$N^{\frac{1}{2}} [\Phi_N(\omega_i) - E[\Phi_N(\omega_i))] \qquad (i = 1, 2, \ldots, \theta) \qquad (10.6)$$

of any order not exceeding Q tend, with $N \to \infty$, to those of the normal distribution whose variances and covariances are given by (10.5).

Proof. Since, for any ω, $\Phi_N(\omega)$ is a linear combination of $C_{0,N}, \ldots, C_{N-1,N}$, each of the moments under consideration exists and can be computed owing to Theorem 6.2. The resulting expression is a linear combination of moments of $N^{\frac{1}{2}}(C_{k,N} - R_k)$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ and each of these moments is composed of two parts: the main part (0 in the case of an odd order), and the remainder, whose order of magnitude is given in Theorem 6.2. Thus the moment of (10.6) is the sum of two expressions, of which the first, and main, part is made up with the main parts of the relevant moments of $N^{\frac{1}{2}}(C_{k,N} - R_k)$ $(k = 0, \ldots, N-1)$, while the second part — the remainder part — is a linear combination of the corresponding remainders.

As observed in Section 7, the main parts of the moments of $N^{\frac{1}{2}}(C_{k,N} - R_k)$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ are the moments of a normal distribution whose covariances are known (there are no remainders in the second moments!). Thus the main part of the moment of (10.6) is exactly the moment which would be obtained if the C's were normal, *i. e.* if (10.6) were normally distributed.

As to the remainder part, according to Theorem 6.2, if $0 \leqslant k_\nu < N$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, the residual in $E[\Pi_{\nu=1}^{n}(C_{k_\nu,N} - R_{k_\nu})]$ is dominated by

$$A_n \left[\prod_{\nu=1}^{n} (N - k_\nu)\right]^{-\frac{1}{2}} \left[N - \max_{1 \leq \nu \leq n} k_\nu\right]^{-\frac{1}{2}},$$

where A_n is a constant depending on the number n and on the process only; the last exponent can be replaced by -1 when n is even, but this is not necessary for the purpose of the present argument. The absolute value of the remainder part in the moment of Φ_N will be increased, if anything, by substituting their absolute values for the covariances of the C's, by omitting the trigonometric coefficients as well as, in the first term, the factor ω, and by writing, in each of the following terms, $k/(k+1)$ for $1/\pi$. Thus the remainder part of the moment is dominated by

$$N^{n/2} A_n \sum_{k_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{N-1} \{N - \max_{1 \leq \nu \leq n} k_\nu\}^{-\frac{1}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{(N - k_\nu)^{\frac{1}{2}}}{N(k_\nu + 1)}. \tag{10.7}$$

Given any particular value of ν ($\nu = 1, \ldots, n$) and any integer $K (0 \leqslant K < N)$, the partial sum corresponding to all the terms of this expression in which $k_\nu = \max(k_1, \ldots, k_n) = K$ is, clearly,

$$\frac{N^{\frac{n}{2}-1} A_n}{K+1} \left\{ \sum_{k=0}^{K} \frac{(N-k)^{\frac{1}{2}}}{N(k+1)} \right\}^{n-1} \leqslant \frac{N^{\frac{n}{2}-1} A_n}{K+1} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-k)^{\frac{1}{2}}}{N(k+1)} \right\}^{n-1}$$

and is independent of ν. Obviously, $k_\nu = K$ can hold for several values of ν, so that the partial sum of (10.7) composed of all the terms for which $\max(k_1, \ldots, k_\nu) = K$ is smaller than

$$\frac{n A_n N^{\frac{n}{2}-1}}{K+1} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-k)^{\frac{1}{2}}}{N(k+1)} \right\}^{n-1},$$

and, finally, (10.7) is smaller than the sum of all these expressions, corresponding to $K = 0, 1, \ldots, N-1$, *i. e.* smaller than

$$n A_n N^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \sum_{K=0}^{N-1} \frac{1}{K+1} \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-k)^{\frac{1}{2}}}{N(k+1)} \right\}^{n-1} <$$

$$< n A_n N^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \sum_{K=0}^{N-1} \frac{1}{K+1} \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}(k+1)} \right\}^{n-1} < n A_n N^{-\frac{1}{2}} (1 + \log N)^n,$$

which tends to 0. Hence the proof is complete.

Theorem 10.2. Under the assumption of Theorem 8.1, if $0 \leqslant \omega_i \leqslant \frac{1}{2}$ ($i = 1, \ldots, \theta$), the joint distribution of the random variables

$$N^{\frac{1}{2}} [\Phi_N(\omega_i) - E[\Phi_N(\omega_i)]] \qquad (i = 1, \ldots, \theta) \tag{10.8}$$

tends to the normal multivariate distribution with zero means characterized by the limiting covariances given by (10.5).

Proof. If the ε's have finite moments of every order, this is an immediate consequence of Proposition 10.1 and Corollary 7.2. Otherwise, make

$$\Phi_N^{(j)}(\omega) = C_{0,N}^{(j)}\,\omega + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N-k}{Nk}\,C_{k,N}^{(j)}\sin 2\pi k\omega \quad (j=1,2,3,4),$$

where $C_{k,N}^{(j)}$ are defined in Section 8. In view of (8.8),

$$E[\Phi_N^{(2)}(\omega)] = E[\Phi_N^{(3)}(\omega)] = 0 \qquad (0 \leqslant \omega \leqslant \tfrac{1}{2}),$$

and, further, according to (10.4) and (8.11),

$$N^{\frac{1}{2}}[\Phi_N(\omega) - E(\Phi_N(\omega))] = N^{\frac{1}{2}}[\Phi_N^{(1)}(\omega) - E(\Phi_N^{(1)}(\omega))] + N^{\frac{1}{2}}\,\Phi_N^{(2)}(\omega) + \\ + N^{\frac{1}{2}}\,\Phi_N^{(3)}(\omega) + N^{\frac{1}{2}}[\Phi_N^{(4)}(\omega) - E(\Phi_N^{(4)}(\omega))]. \qquad (10.9)$$

The moments of $N^{\frac{1}{2}}[\Phi_N^{(1)}(\omega) - E(\Phi_N^{(1)}(\omega)]$ can be computed in the same way as those of (10.8) in the proof of Proposition 10.1. In their main parts, $\varkappa_2$ and $\varkappa_4$ have to be replaced by the corresponding cumulants of $\eta_{t,N}$, but, in view of (8.4) with $m=2$ and $m=4$, this does not affect the limits. In the remainder parts, the higher-order cumulants are no longer independent of N, but, owing to (8.5), it is easy to see that those parts become now $O\{N^{-\frac{1}{2}}(\log N)^{2n}\}$ and, therefore, still tend to 0. Thus the moments under consideration tend to those of the required distribution, so that, according to Corollary 7.2, the joint distribution of $N^{\frac{1}{2}}[\Phi_N^{(1)}(\omega_i) - E(\Phi_N^{(1)}(\omega_j))]$ for $i = 1, \ldots, \theta$ tends to the aforesaid distribution.

But it is easy to see that, for $j = 2, 3$ and for any ω,

$$N\,E[\Phi_N^{(j)}(\omega)]^2 \leqslant N\sum_{k,l=0}^{N-1}\frac{N-k}{N(k+1)}\cdot\frac{N-l}{N(l+1)}\,\left|\operatorname{cov}\left(C_{k,N}^{(j)}, C_{l,N}^{(j)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{2}\sum_{k,l=0}^{N-1}\left\{\frac{(N-k)^2}{N^2(k+1)^2}+\frac{(N-l)^2}{N^2(l+1)^2}\right\}\left|\operatorname{cov}\left(C_{k,N}^{(j)}, C_{l,N}^{(j)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant N\sum_{k,l=0}^{N-1}\left\{\frac{N-k}{N(k+1)}\right\}^2\left|\operatorname{cov}\left(C_{k,N}^{(j)}, C_{l,N}^{(j)}\right)\right|,$$

and, further, according to (8.10),

$$N\,E\,[\Phi_N^{(j)}(\omega)]^2 \leqslant \frac{E(\eta_{t,N}^2)\,E(\zeta_{t,N}^2)}{\varkappa_2^2}\sum_{k,l=0}^{N-1}\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{R}_q\,\mathfrak{R}_{q+k-l} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{E(\eta_{t,N}^2)\,E(\zeta_{t,N}^2)}{\varkappa_2^2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{l,q=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{R}_q\,\mathfrak{R}_{q+k-l} \leqslant$$

$$\frac{E(\eta_{t,N}^2)\,E(\zeta_{t,N}^2)}{\varkappa_2^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}\left[\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{R}_q\right]^2,$$

so that, clearly,

$$\operatorname{p\,lim}_{N\to\infty} N^{1/2}\,\Phi_N^{(j)}(\omega) = 0 \qquad (j = 2, 3;\ 0 \leqslant \omega \leqslant 1/2). \tag{10.10}$$

Finally, $N \operatorname{var} \Phi_N^{(4)}(\omega)$ can be computed in terms of the covariances of $C_{k,N}^{(4)}$ in the same way in which $N \operatorname{var} \Phi_N(\omega)$ can be expressed by means of the covariances of $C_{k,N}$, but $\varkappa_2$ and $\varkappa_4$ have to be replaced by the corresponding cumulants of $\zeta_{t,N}$. Therefore, according to (8.4), $N \operatorname{var} \Phi_N^{(4)}(\omega) \to 0$ with $N \to \infty$, so that

$$\operatorname{p\,lim}_{N\to\infty} N[\Phi_N^{(4)}(\omega) - E(\Phi_N^{(4)}(\omega))] = 0 \quad (0 \leqslant \omega \leqslant 1/2). \tag{10.11}$$

Now, in view of (10.9), (10.10) and (10.11), and according to a previously quoted proposition given by *Cramér* [2] (cf. Section 22.6), the limiting distribution of (10.8) is the same as that of $N^{1/2}[\Phi_N^{(1)}(\omega_i) - E(\Phi_N^{(1)}(\omega_i))]$ $(i = 1, \ldots, \theta)$, *i. e.* the distribution specified in the theorem.

Various estimators of the spectral *density* function can be investigated in a similar way. Most of them can be expressed in the form of

$$Z'_N(\omega) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}\, C_{k,N} \cos 2\pi k \omega,$$

where $\lambda_{k,N} = \lambda_{-k,N}$ are suitably chosen non-negative constants ("weights") not exceeding 1. In particular,

$$\lambda_{k,N} = \begin{cases} 1 - \dfrac{|k|}{N} & \text{when } |k| \leqslant \nu, \\ 0 & \text{when } |k| > \nu \end{cases}$$

yields the truncated periodogram. In order to make it consistent, we must chose ν as a function of N so that $\nu/N \to 0$, but $\nu \to \infty$ when $N \to \infty$. More particularly, if the covariance function is dominated by a decreasing exponential, the „best" ν according to criteria which will not be discussed here is, for large values of N, of the shape of

$$\nu = [a \log N], \tag{10.12}$$

where a is a constant which should fit the parameters of the process (cf. [14]). A near-optimum estimator is obtained in the same case, by making

$$\lambda_{k,N} = \frac{\varrho^k}{\varrho^k + \dfrac{1+\varrho}{1-\varrho} \cdot \dfrac{1}{N - |k|}}, \tag{10.13}$$

where the best choice of the parameter ϱ $(0 < \varrho < 1)$ depends, again, on the parameters of the process (*ibidem*). It is easy to see that average, with respect to ω, of the variance of each of these two estimators is of the order of ν/N, where $\nu = \log N$ in the case of (10.13), and that there is no frequency for which this order of magnitude is exceeded. Asymptotic formulae in closed terms for these variances will be given elsewhere; without using them, however, by arguments closely resembling those on which Proposition 10.1 and Theorem 10.2 were based, one can easily obtain the following:

Theorem 10.3. Under the assumptions of Theorem 10.2, if $Z'_N(\omega)$ is either the estimator defined by (10.13) or the truncated periodogram with ν growing to infinity slower than any power of N, then the joint probability distribution of the random variables

$$\nu^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}[Z'_N(\omega_i) - E(Z'_N(\omega_i))] \qquad (i = 1, \ldots, \theta), \qquad (10.14)$$

where $\nu = \log N$ in the case of (10.13), tends, with $N \to \infty$, to a normal multivariate distribution with finite variances. Moreover, if the ε's have finite moments of every order, the random variables (10.14) have mixed and univariate moments of every order tending, with $N \to \infty$, to the corresponding moments of this distribution.

The proof of this theorem, as compared with that of Theorem 10.2, is greatly simplified by the fact that the number of non-negligible terms is relatively small. In the second part of the present paper, by entering into the details of the structure of the remainder terms of the moments of the covariance estimators, it will be possible to extend the preceding result, as far as the truncated periodogram is concerned, to the case where ν does not necessarily grow slower than any positive power of N, but is merely assumed to satisfy $\nu/N \to 0$; the relevance of this extension is due to the fact that if the covariance function is not dominated by a decreasing exponential, the "best" ν is no longer of the shape of (10.12), but may be of the order of a positive power of N.

11. Polynomials in $C_{0,N}, \ldots, C_{l,n}$

As a very simple application of the results of Section 6, we have the following:

Proposition 11.1. Let $\Phi_\mu(u_0, \ldots, u_l)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ be arbitrary polynomials. Then, under the assumptions of Theorem 6.1, the random variables

$$N^{\frac{1}{2}}[\Phi_\mu(C_{0,N}, \ldots, C_{l,N}) - \Phi_\mu(R_0, \ldots, R_l)] \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \qquad (11.1)$$

have finite univariate and mixed moments of every order tending, with $N \to \infty$, to those of the multivariate normal distribution with zero means and a covariance matrix

$$\Big\| \sum_{i,j=0}^{l} \Phi_{\mu,i}\, \Phi_{\nu,j}\, v_{i,j} \Big\| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, m), \tag{11.2}$$

where $\Phi_{\mu,i}$ denotes the partial derivative $\delta \Phi_\mu / \delta u_i$ taken at the point $u_k = R_k$ $(k = 0, \ldots, l)$.

Proof. Using Taylor expansions of the polynomials under consideration, we find

$$N^{1/2}[\Phi_\mu(C_{0,N}, \ldots, C_{l,N}) - \Phi_\mu(R_0, \ldots, R_l)] = \tag{11.3}$$

$$= N^{1/2} \sum_{i=0}^{l} \Phi_{\mu,i}(C_{i,N} - R_i) + N^{1/2}\, \psi_\mu(C_{0,N} - R_0, \ldots, C_{l,N} - R_l) \quad (\mu = 1, \ldots, m),$$

where $\psi_1, \ldots, \psi_m$ are polynomials which contain no terms of degree lower than 2. It follows that any univariate or mixed moment of order, say, n of (11.1) is a linear combination of moments of the covariance estimators. The moments arising out of the linear parts of (11.3) are all of order n, and, multiplied by $N^{n/2}$, tend to finite limits, which, according to Corollary 6.4, are the appropriate elements of the matrix (11.2) when $n = 2$, and are the higher moments of the corresponding normal multivariate distribution when $n > 2$, while they obviously vanish when $n = 1$. The terms due to the presence of the polynomials ψ_μ in the right-hand sides of (11.3) are composed of moments of $C_{0,N}, \ldots, C_{l,n}$ of orders higher than n, and since these moments are still multiplied merely by $N^{n/2}$, these terms tend to 0 as $N \to \infty$. Hence the proof is complete.

When the ε's are not assumed to have finite moments of every order, only statements about the distribution itself of (11.1) can be made. By using the devices introduced in Section 8, on the basis of Proposition 11.1, one can easily prove the following:

Proposition 11.2. Under the assumptions of Theorem 8.1, $\Phi_1(u_0, \ldots, u_l), \ldots, \Phi_m(u_0, \ldots, u_l)$ being arbitrary polynomials, the joint probability distribution of (11.1) tends to the normal distribution with zero means defined by the covariance matrix (11.2).

This proposition, however, is also an immediate consequence of Proposition 8.1, and of a theorem given by *Hoeffding* and *Robbins* ([9]; Cf. their Theorem 4).

Remark 11.3. The statements made above obviously remain true if the estimators $R_{k,N}$ are substituted for $C_{k,N}$.

A trivial instance of the preceding propositions concerns linear combinations of the covariance estimators; it can be applied to the theory of the tests of fit for autoregressive schemes devised by *Quenouille* [18] and *Bartlett* and *Diananda* [1]. Polynomials in $C_{0,N}, \ldots, C_{l,N}$ of degree higher than 1 intervene in the estimation of the coefficients of an autoregressive scheme (Cf. [15]).

12. Acknowledgements

The present paper owes much to discussions between Mr. *J. D. North* (Chairman and Managing Director of Boulton Paul Aircraft, Ltd.) and the authors; they are very much indebted to him both for this and for allowing them to publish their work. Thanks are also due to their colleague *R. G. Hilton* for reading with them the crucial parts of the manuscript.

References

[1] *M. S. Bartlett* and *P. H. Diananda*, "Extensions of Quenouille's test for autoregressive schemes", J. Roy. Statist. Soc., Ser. B., Vol. 12 (1950), pp. 108 — 115.

[1a] *M. S. Bartlett*, An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications, Cambridge University Press, 1955.

[2] *H. Cramér*, Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1946.

[3] *H. Cramér* and *H. Wold*, "Some theorems on distribution functions", J. London. Math. Soc., Vol. 11 (1936), pp. 290—294.

[4] *P. H. Diananda*, "Some probability limit theorems with statistical applications", Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 49 (1953), pp. 239—246.

[5] *M. Fréchet* and *J. Shohat*, "A proof of the generalized second-limit theorem", Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 33 (1931), pp. 533—543.

[6] *U. Grenander*, "On empirical spectral analysis of stochastic processes", Ark. Mat., Vol. 1 (1951), pp. 503—531.

[7] *U. Grenander* and *M. Rosenblatt*, "Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes", Ann. Math. Stat., Vol. 24 (1953), pp. 537—558.

[8] *U. Grenander* and *M. Rosenblatt*, "Comments on statistical spectral analysis", Skand. Aktuarietidskr., Vol. 36 (1953), pp. 182—202.

[9] *W. Hoeffding* and *H. Robbins*, "The central limit theorem for dependent random variables", Duke Math. J., Vol. 15 (1948), pp. 773—780.

[10] *M. Kendall*, The Advanced Theory of Statistics, Vol. I, Charles Griffin & Co., New York and London, 1945.

[11] *P. Lévy*, Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[12] *M. Loève*, Probability Theory. Foundations. Random Sequences. D. van Nostrand Co., New York, 1955.

[13] *Z. A. Lomnicki* and *S. K. Zaremba*, "On the estimation of autocorrelation in time series", Ann. Math. Stat., Vol. 28 (1957), pp. 140—158.

[14] *Z. A. Lomnicki* and *S. K. Zaremba*, "On estimating the spectral density function of a stochastic process", J. Roy. Statist. Soc. (in print).

[14a] *Z. A. Lomnicki* and *S. K. Zaremba*, "A further instance of the central limit theorem for dependent random variables", Math. Zeitschr., Vol. 66 (1957), pp. 490—494.

[15] *H. B. Mann* and *A. Wald*, "On the statistical treatment of linear stochastic difference equations", Econometrica, Vol. 11 (1943), pp. 173—220.

[16] *C. Marsaglia*, "Iterated limits and the central limit theorem for dependent variables", Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 5 (1954), pp. 987—991.

[17] *P. A. P. Moran*, "Some theorems on time series, I", Biometrika, Vol. 34 (1947), pp. 281—291.

[18] *M. H. Quenouille*, "A large-sample test for the goodness of fit of autoregressive schemes", J. Roy. Statist. Soc., Vol. 110 (1947), pp. 123—129.

[19] *J. V. Uspensky*, Introduction to Mathematical Probability, McGraw-Hill Book Co., New York and London, 1937.

Buchbesprechungen

Luigi Bianchi: Opere. Vol. V: Trasformazioni delle superficie e delle curve. 535 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1957. Lire 5000.

Der vorliegende Band enthält 25 Arbeiten differentialgeometrischen Inhalts aus den Jahren 1878 bis 1920. Der überwiegende Teil dieser Arbeiten behandelt gewisse Transformationen von Flächen konstanter Krümmung und geht in seinen Grundideen auf die Habilitationsschrift *Bianchi's* „Ricerche sulle superficie a curvatura constante e sulle elicoidi" (Pisa 1879) zurück. Zahlreiche Ergebnisse sind in der zusammenfassenden Abhandlung „Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante (1899)" systematisch und vervollständigt dargestellt, weshalb diese Publikation auch für ein einführendes Studium geeignet erscheint.

In einem Vorwort von *P. Tortorici*, der die Herausgabe des Bandes besorgt hat, werden die einzelnen Arbeiten knapp charakterisiert und so eine rasche Orientierung ermöglicht. *K. Mayrhofer*, Wien

Corrado Segre: Opere. Vol. I. 443 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1957. Lire 4000.

Nach den Plänen der Italienischen Mathematikervereinigung soll eine Auswahl von Schriften von *C. Segre* im voraussichtlichen Umfange von vier Bänden neu verlegt werden. — Der vorliegende Band I enthält 21 Arbeiten über algebraische Geometrie aus den Jahren 1883 bis 1901. Diese Arbeiten haben zum Teil vorbereitenden Charakter und gipfeln in der umfangreichen Abhandlung „Introduzione alle geometria sopra un ente algebraico semplicemente infinito" (1894) mit den schönen Beweisen des *Riemann-Roch*schen Satzes und des Korrespondenzprinzips von *Cayley-Brill*.

In einem Vorwort von *F. Severi* wird die Entwicklung der algebraischen Geometrie in Italien seit *L. Cremona* umrissen und der Beitrag von *C. Segre* gewürdigt. *K. Mayrhofer*, Wien

A. Denjoy, Un Demi-Siècle (1907—1956) de Notes communiquées aux Académies de Paris, d'Amsterdam, des Lincei suivies par des observations et commentaires. I: La variable complexe. 279 S. ffr. 2200. — II: Le champ réel. 464 S. ffr. 3100. Paris: Gauthier-Villars. 1957.

Mit Hilfe des Centre National de la Recherche Scientifique wurden hier zahlreiche Arbeiten von *A. Denjoy*, welche im Laufe eines halben Jahrhunderts in den Berichten verschiedener Akademien veröffentlicht wurden, gesammelt herausgegeben. Insgesamt sind es in beiden Bänden 166 Arbeiten, welche dem Leser hier im Zusammenhang zur Verfügung stehen. Diese sind nach fünf Hauptgebieten geordnet: A. Funktionen einer komplexen Variablen. B. Metrik und Topologie von Mengen und von Funktionen reeller Variablen. C. Topologie cartesischer (und analoger) Räume. D. Wohlordnung und Ordnungszahlen. E. Analytische Mechanik. In jedem dieser Hauptgebiete wurde eine weitere Unterteilung vorgenommen. So z. B. finden wir u. a. in A. Arbeiten zur Theorie

der ganzen Funktionen, der quasi-analytischen Funktionen und der konformen Abbildung, in B. Arbeiten zum *Denjoy*schen Integral und zur Theorie der trigonometrischen Reihen, in C. verschiedene Beweise des *Jordan*schen Kurvensatzes, in D. eine Arbeit zum *Souslin*schen Problem und in E. verschiedenes über das Ergodenprinzip. Am Schluß jedes Bandes finden sich sehr ausführliche Kommentare und Hinweise auf weitere Forschungen. Dieser reichhaltige Querschnitt durch das mathematische Schaffen nicht nur eines bedeutenden Mathematikers, sondern auch einer ganzen Epoche, wird jedem Mathematiker und an der Mathematik Interessierten von großem Wert sein. *K. Prachar*, Wien

Reden und Reisen eines Geometers. Von *W. Blaschke*. Mit einem Bild des Autors, 115 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 7.20.

Jeder, der auch nur ganz wenig für Mathematik übrig hat und das Buch in die Hand bekommt, wird es mit großem Interesse rasch zu Ende lesen. Es enthält sechs Aufsätze, die typisch für die Darstellung des Autors sind. Der erste ist eine Plauderei über Mathematik, der zweite bringt die Rektoratsrede über *Leonardo* und die Naturwissenschaften, der dritte schildert Leben und Wirken von *Kepler* und *Galilei* und der vierte berichtet die Eindrücke einer Reise um die Erde. Diese vier Aufsätze brachte auch das schon vor sechs Jahren erschienene Buch: „Mathematik und Leben" des Autors im Verlag Steiner in Wiesbaden. Neu sind der Vortrag über *Regiomontanus* und der Lebenslauf des Autors. *N. Hofreiter*, Wien

Raum und Zahl. Von *K. Reidemeister*. Mit 31 Textabb., VII, 151 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 19,80.

Dieses Buch vermittelt eine eigenartige und sehr reizvolle Einführung in das mathematische Denken. Ausgehend von der Anschauung des Raumes gibt der Verfasser einen Einblick in verschiedene Teilgebiete der Mathematik. In meisterhafter Weise werden die Gedankengänge dargestellt, welche zu den Grundbegriffen und zu charakteristischen Problemen dieser Teilgebiete hinführen, es werden aber auch die Wandlungen aufgezeigt, denen die Betrachtungsweise der einzelnen Gebiete im Laufe der Zeit unterworfen war. Das Buch wird deshalb nicht nur von mathematisch interessierten Laien mit Gewinn gelesen werden, sondern es hat auch dem reinen Mathematiker, soweit er nicht in der Enge seines Spezialgebietes befangen ist, vieles zu sagen und wird nicht zuletzt dem Lehrer wertvolle Anregungen geben.

Nachstehend eine kurze Übersicht über den Inhalt: Vom Ursprung des geometrischen Denkens. Über Mechanismen. Analytische Geometrie. Über den Unterschied der Gegenden im Raum. Anschauung und Begriff. Geometrie und Logik. Eine Begründung der Infinitesimalrechnung. Carl Friedrich Gauss. Geometrie und Zahlentheorie. Prolegomena einer kritischen Philosophie.

W. Nöbauer, Wien

Das mathematische Denken der Antike. Von *O. Becker*. (Studienhefte zur Altertumswissenschaft: Heft 3.) Mit 70 Textabb., 128 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1957. DM 9,50.

Das Buch beginnt mit einer historischen Übersicht über die ägyptische, die sumerisch-babylonische und die griechische Mathematik, ist aber der Hauptsache nach nicht eine Geschichte der antiken Mathematik, sondern will einen Einblick in deren Inhalt sowie die Denkweise der damaligen Zeit vermitteln. Dabei steht die griechische Mathematik im Vordergrund, während die orientali-

sche nur so weit herangezogen wird, daß ihre Beziehung zur griechischen gesehen werden kann. Das Verfahren, das der Verfasser anwendet, besteht vorwiegend darin, daß er nicht zu komplizierte, aber auch nicht zu einfache Stellen aus überlieferten Texten auswählt, diese sorgfältig kommentiert und nach Möglichkeit untereinander verbindet, z. T. unter Ausnutzung feinster philologischer oder historischer Handhaben. Der dargestellte Stoff ist reichlich mit Quellenangaben versehen und verteilt sich im Falle der griechischen Mathematik von *Thales* bis *Pappos* und *Diophantos*. Hervorgehoben sei nur die Bearbeitung der allgemeinen Proportionenlehre des *Eudoxos* aus dem V. Band der „Elemente" *Euklids*, ferner die Umsicht, mit der das Auftreten von Stetigkeitsaxiomen verfolgt und mit modernen Vorstellungen verbunden wird.

Das klar und flüssig geschriebene Buch kann bei bescheidenen mathematischen Kenntnissen verstanden werden — freilich nicht ganz mühelos — und hinterläßt die Überzeugung, daß die heutige mathematische Denkweise im Wesen dieselbe ist wie die der alten Griechen und daß diesen neben umfangreichen Sachkenntnissen bereits manches im Keime bewußt war, das erst in moderner Zeit vollendet wurde. *K. Mayrhofer*, Wien

Wandlungen des mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik. Von *H. Meschkowski*. Mit 19 Textabb., 4 Tafeln, 122 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1956. DM 12.80.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, einen weiten Leserkreis die Gedankenwelt der Mathematik nahe zu bringen. In der Literatur liegen ja schon mehrere Bücher mit gleicher Tendenz vor, darunter sehr gute, aber wir sehen jetzt doch in manchen Dingen klarer als noch vor einigen Jahren. So ist das Erscheinen dieses Buches durchaus zu begrüßen, da es mit Sachkenntnis geschrieben ist und auch originelle Gedanken bringt. Die Darstellung ist keineswegs oberflächlich, so daß durch die Lektüre dieses Werkes ein wirkliches Verständnis erreicht werden kann. Das Buch bringt auf kleinem Raum verhältnismäßig viel und berücksichtigt die neueste Literatur, ist aber doch infolge seiner sehr klaren und prägnanten Darstellung sehr gut zu lesen. Dieses Buch kann auch unseren Mathematiklehrern und Studenten wärmstens empfohlen werden.

E. Hlawka, Wien

Vector Spaces and Matrices. Von *R. M. Thrall* und *L. Tornheim*. XII, 318 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1957. $ 6,75.

Es gibt bereits eine große Zahl von Lehrbüchern über lineare Algebra. In manchen Büchern, die für Anfänger oder für Nichtmathematiker geschrieben sind, ist das Niveau sehr niedrig. Andere Bücher hingegen sind von hohem Standpunkt aus verfaßt. Das vorliegende Buch geht einen Mittelweg. Die Theorie wird sowohl in abstrakter wie in konkreter Form entwickelt. Der axiomatische Aufbau gewährt eine bessere Einsicht in die allgemeinen Zusammenhänge, während die zahlreichen konkreten Beispiele die Lesbarkeit erleichtern und die Verbindung zu den Anwendungen herstellen. Im Vordergrund steht eine axiomatische Darstellung der Vektorräume mit vielen Beispielen. Dann folgen lineare Transformationen, Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Determinanten, quadratische Formen, Eigenwertproblem, Äquivalenz von Matrizen, Polynomringe, algebraische und transzendente Erweiterungen. Das letzte Kapitel bringt ganz kurz lineare Ungleichungen mit Anwendungen auf Spieltheorie und lineare Programmierung. Mit diesem Buch wird die schon große Zahl an Büchern über lineare Algebra um ein gutes Lehrbuch erweitert. *N. Hofreiter*, Wien

Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. Von *I. M. Gelfand* und *M. A. Neumark*. (Mathematische Monographien: Band VI.) XL, 333 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1955. DM 36,—.

Bekanntlich lassen sich im wesentlichen alle komplexen halbeinfachen Lie-Gruppen zurückführen auf die komplexen klassischen Gruppen, also die unimodulare, die orthogonale und die symplektische Gruppe; diese Gruppen sind daher von besonderer Wichtigkeit. Die Frage nach den Darstellungen dieser Gruppen durch Matrizen, also den endlichdimensionalen Darstellungen, wurde von *Cartan* schon 1914 vollständig beantwortet. Man kann aber auch „unendlichdimensionale" Darstellungen, das heißt Darstellungen durch lineare Transformationen eines Hilbert-Raumes, betrachten. Die unitären Darstellungen dieser Art kann man in üblicher Weise zurückführen auf die irreduziblen unitären Darstellungen; das Problem der Berechnung aller dieser Darstellungen wurde von den Verfassern in einer großen Monographie, welche im Jahre 1950 in russischer Sprache erschienen ist, vollständig gelöst. Die Übersetzung dieser Monographie bildet den Hauptteil des vorliegenden Buches. Die Verfasser erhalten nicht nur die unitären Darstellungen, sondern darüber hinaus eine allgemeinere Menge von Darstellungen, in der sowohl die unitären, als auch die endlichdimensionalen Darstellungen enthalten sind. Besonders ausführlich wird zuerst die komplexe unimodulare Gruppe behandelt. Es ergeben sich bei ihr drei Klassen von irreduziblen unitären Darstellungen, welche bezeichnet werden als die „nicht ausgeartete Hauptserie", die „ausgeartete Hauptserie" und die „ergänzenden Serien". Von diesen irreduziblen Darstellungen kommen aber nur die der nicht ausgearteten Hauptserie in der regulären Darstellung der Gruppe vor. Es gelingt den Verfassern auch, eine Theorie der Charaktere der unitären Darstellungen zu entwickeln und bei der Untersuchung dieser Darstellungen mit Erfolg anzuwenden. Im Falle der orthogonalen und der symplektischen Gruppe ergeben sich ähnliche Resultate wie bei der unimodularen Gruppe.

Das Buch enthält außerdem neben einem Vorwort, in welchem über den gegenwärtigen Stand der Darstellungstheorie Liescher Gruppen berichtet wird, in einem Anhang die Übersetzung einer weiteren Arbeit der beiden Verfasser („Unitäre Darstellungen einer unimodularen Gruppe, die die Einheitsdarstellung der unitären Untergruppe enthalten") aus dem Jahre 1952 und von zwei Arbeiten von *Gelfand* und *Grajew* aus den Jahren 1953 bzw. 1955 („Über eine allgemeine Methode zur Zerlegung der regulären Darstellung einer Lieschen Gruppe in irreduzible Darstellungen" und „Ein Analogon der Plancherelschen Formel für die klassischen Gruppen").

Mit der Herausgabe des vorliegenden Buches ist wieder ein sehr wertvoller Beitrag zu den Bestrebungen geleistet worden, die russische mathematische Literatur der Allgemeinheit der westlichen Mathematiker zugänglich zu machen.

W. Nöbauer, Wien

Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern. Von *C. Meyer*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien II. Abt.: Band V.) IX, 132 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. DM 29,—.

Das Buch ist eine erweiterte Fassung der Dissertation des Verfassers, die den Titel hatte: „Berechnung der Klassenzahl für Zahlkörper, deren galoisscher Zahlkörper über einem quadratischen Zahlkörper abelsch ist." Mit der Frage der Bestimmung der Klassenzahlen befaßte sich bereits *Gauß*. *Dirichlet* verdankt man die Heranziehung analytischer Hilfsmittel. Daran schlossen

sich Untersuchungen von *Kummer* und *Dedekind*. Durch die analytischeKlassenzahlformel war die Aufgabe der Ermittlung der Klassenzahl eines algebraischen Zahlkörpers auf die Ermittlung des Residuums seiner Zetafunktion in ihrem Pol zurückgeführt. Weitere Fortschritte in der Berechnung der Klassenzahl algebraischer Zahlkörper wurden durch die Untersuchungen von *Hecke* über die analytische Natur der Dedekindschen Zetafunktion und der abelschen L-Funktionen erzielt. Während bisher vielfach als Grundkörper der Körper der rationalen Zahlen gewählt wurde, wird in dieser Monographie ein beliebiger quadratischer Körper als Grundkörper angenommen. Es wird nach der Klassenzahl derjenigen algebraischen Zahlkörper gefragt, deren galoisscher Zahlkörper über dem quadratischen Grundkörper abelsch ist. Aus Gründen der Einheitlichkeit und der Systematik wird der Standpunkt der Klassenkörpertheorie angenommen. Einen breiten Raum nehmen analytische Untersuchungen ein, insbesondere die Kroneckerschen Grenzformeln für die L-Funktionen der Ringklassen und der Strahlklassen in quadratischen Zahlkörpern. Vom Leser dieser Monographie werden sehr gute Kenntnisse aus Arithmetik, Algebra und Analysis verlangt.

N. Hofreiter, Wien

Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band II: Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche. Von *O. Perron*. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 6 Textabb., VI, 314 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. DM 49,—.

Der zweite Teil wurde stärker umgearbeitet als der erste (Monatshefte **59**, S. 67). Dies gilt vor allem für die früheren Kapitel 6 bis 9, jetzt Kapitel 1 bis 4. Heben wir einige Dinge hervor: Die Kettenbrüche von *Ramanujan* nach *Preece* und *Perron*, die Konvergenzsätze von *Wall* und *Scott*, das Parabeltheorem, die Entwicklungen von *Leighton* und *Scott* und *E. Frank*, die I-Kettenbrüche und jene von *Thron* und *E. Frank*. Trotz dieser Erweiterungen ist es ein echtes Lehrbuch geblieben aus einem Guß. Bescheidene Kenntnisse aus Analysis genügen für die Lektüre dieses Buches. Ich möchte noch auf das sehr lesenswerte Vorwort hinweisen (nicht zu vergessen die Fußnote auf S. 291). Auch in der neuen Form ist das Buch in Inhalt und Darstellung ein Meisterwerk der mathematischen Literatur. Wir alle haben aus diesem Buch Kettenbrüche gelernt. Dies wird auch weiterhin der Fall sein. *E. Hlawka*, Wien

Trattato di Analisi Matematica. Von *M. Picone* und *G. Fichera*. Vol. II: Complementi d'algebra e di calcolo infinitesimale. Serie e prodotti infiniti. Fondamenti della teoria delle equazioni differenziali nel campo reale e in quello complesso. Mit 50 Textabb., 883 S. Rom: Tumminelli. 1956. Lire 9500.

Der erste Band dieses umfangreichen und gehaltvollen Werkes über höhere Analysis ist bereits 1954 erschienen (vgl. die Besprechung in diesen Monatsheften **58**, 216); er enthielt die Grundlagen der linearen Algebra, der Differential- und Integralrechnung, sowie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Variablen. Der nun vorliegende 2. Band hat beinahe den doppelten Umfang und ist wieder in fünf Kapitel unterteilt. Von diesen behandelt das erste auf 102 Seiten die Teilbarkeitseigenschaften der Polynome — mehr vom analytischen als vom algebraischen Standpunkt — und schließt mit einem kurzen Ausblick auf die Eliminationstheorie. Im zweiten Kapitel (98 Seiten) werden Methoden für die Eingrenzung und numerische Berechnung von reellen und komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen in einer Unbekannten

vorgeführt; die Eingrenzungssätze sind zum Teil neu und in neuartiger Weise abgeleitet; besonderes Gewicht wird auf die Kriterien von *Hurwitz* und *Routh* gelegt, die für die Theorie der linearen Differentialgleichungen wichtig sind. Die für die numerische Berechnung der Wurzeln vorgeschlagene Methode ist auf die Programmierung von modernen elektronischen Rechenautomaten zugeschnitten; aber es gäbe hier auch weitere Bedürfnisse befriedigende Methoden, wie z. B. die mit einer mehrmaligen Anwendung des *Horner*schen Schemas (nicht „Hörner"!) verbundene Verallgemeinerung der Newtonschen Verbesserungsformel, welche selbst unter den heutigen Umständen der zur geistigen Erschlaffung führenden Automation dargestellt und empfohlen werden dürften.

Außerordentlich schön und klar ist das dritte Kapitel (330 Seiten) geschrieben, welches Ergänzungen zum Riemannschen Integralbegriff für „quasistetige" Funktionen bringt, das sind solche Funktionen, welche in einem zusammenhängenden Gebiet mit Ausnahme höchstens einer Punktmenge vom Jordanschen Maß null stetig sind. Es werden hier mit größter Allgemeinheit und höchster Präzision die Sätze über die Integration und die Eigenschaften der Integrale von Funktionen einer oder mehrerer Variablen abgeleitet, die in einem Gebiet summierbar sind. Viele Sätze sind hier neu oder in einer neuen, verschärften Form ausgesprochen, u. a. der zweite Mittelwertsatz, die Sätze über uneigentliche Integrale und von Parametern abhängende Integrale, die Behandlung der Kurvenintegrale und deren Auswertung für die Theorie der holomorphen Funktionen, die partielle Integration von mehrfachen Integralen, die Sätze von *Green* und *Stokes* für möglichst allgemeine, auch ins Unendliche sich erstreckende Gebiete, eine Verallgemeinerung der Guldinschen Regel auf Volumen und Oberfläche von Kanalflächen mit Anwendungen auf holomorphe Funktionen. Alle Definitionen und Beweise sind aufs genaueste durchgearbeitet und klar und deutlich ausgeführt, so daß dieses Kapitel auch für den Fachmann viel Neues und Anziehendes bietet.

Das vierte Kapitel enthält auf 183 Seiten die Theorie der unendlichen Reihen, mehrfachen Reihen und Produkte. Eingehend wird die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen, insbesondere Potenzreihen in einer oder mehreren Variablen behandelt. Sehr interessant und bemerkenswert sind u. a. die für die Restglieder der Taylorschen Reihen abgeleiteten Integrale, sowie die elegante Entwicklung der Gamma- und Betafunktion. Andererseits vermißt man in diesem Rahmen die Partialbruchentwicklungen meromorpher Funktionen, einige Hinweise auf höhere Limitierungsverfahren und auf die Eulersche Summenformel, die aber wohl in dem mehr den praktischen Methoden gewidmeten 3. Bande nachgeholt werden dürften. Das letzte, fünfte Kapitel (151 Seiten) handelt über Differentialgleichungen und beginnt zunächst mit den allgemeinen Existenzsätzen für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen; darauf folgen Ausführungen über einige partielle Differentialgleichungen, insbesondere über die Laplacesche Differentialgleichung, sowie die Lösung des Dirichletschen und Neumannschen Problems für den Kreis, ferner die Lösung des Cauchyschen Problems der Konstruktion einer harmonischen Funktion, wenn ihre Werte und diejenigen ihrer Normalableitung längs einer Kurve gegeben sind. Sehr interessant sind auch die Entwicklungen über Systeme von linearen Differentialgleichungen; die partikuläre Lösung des inhomogenen Systems wird aus denjenigen des homogenen Systems mit Hilfe einer Quadratur gewonnen, in deren Integranden eine gewisse Matrix, die „matrice nucleare risolvente" auftritt, welche aus den Lösungen des homogenen Systems gebildet ist. Auch hier wird man erwarten dürfen, daß die noch nicht behandelten Gebiete, vor allem die wichtigen Rand- und Eigenwertprobleme, im dritten Band den ihnen zukommen-

den Raum finden werden. Im ganzen kann nochmals wiederholt werden, daß dieses Werk wegen seiner vielen neuen Gesichtspunkte und Methoden, sowie wegen seiner außerordentlich sorgfältigen und strengen Beweisführung die volle Aufmerksamkeit aller Mathematiker verdient.

W. Gröbner, Innsbruck

Funktionentheorie I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Von *K. Knopp* †. Neunte, neubearbeitete Auflage. (Sammlung Göschen: Band 668.) 159 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1957. DM 2.40.

Die neunte Auflage unterscheidet sich durch kleine Änderungen von der achten Auflage. Da das Buch schon mehrfach äußerst lobend referiert wurde (z. B. auch in den Monatsh. Math.), so erübrigt sich eine weitere Besprechung.

N. Hofreiter, Wien

Theorie der Riemannschen Flächen. Von *A. Pfluger*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Bd. 89.) Mit 5 Textabb., XII, 248 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 36.—, geb. DM 39.20.

Nach der „Uniformisierung" von *R. Nevanlinna* und nach der Neuauflage der Weylschen „Idee der Riemannschen Fläche" u. a. nimmt das vorliegende Werk wieder einen durchaus eigenständigen Platz ein. Die Riemannsche Fläche R wird nach *Weyl* als zusammenhängender Hausdorffscher Raum mit einer zweidimensionalen konformen Struktur eingeführt, wobei nach *Radó* das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht gefordert zu werden braucht. Auf R wird mit Verwendung des Cartanschen Kalküls eine Kohomologie der auf R exakten linearen Differentialformen eingeführt und dual dazu die Homologie mit Hilfe der Linienintegrale. Die Existenztheoreme nach *Perron* und nach der Methode des Dirichletschen Prinzips mit ihren konstruktiven Varianten werden gegeneinander abgewogen. Die abelschen Differentiale auf nichtkompakten Riemannschen Flächen wurden seit der Arbeit von *Nevanlinna* über quadratisch integrierbare Differentiale ausführlich behandelt: dabei spielen die nullberandeten Flächen (jede negative subharmonische Funktion auf R ist konstant) und verwandte Flächenklassen eine Rolle. Die dabei hergestellte Verbindung zum Typenproblem schließt mit dem von *Royden* gegebenen hinreichenden Kriterium für den hyperbolischen Typus. — Das Buch stellt eine wertvolle Bereicherung der funktionentheoretischen Literatur dar.

H. Hornich, Graz

Elements of Partial Differential Equations. Von *I. N. Sneddon*. X, 327 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1957. $ 7,50.

Das vorliegende Buch entstand aus Vorlesungen, die der Verfasser während der letzten zehn Jahre an der Universität von Glasgow und bei anderen Gelegenheiten gehalten hat. Der charakteristische Zug des Buches ist die Behandlung einer sehr großen Zahl von speziellen Fragen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, insbesondere von solchen Fragen, die für die Anwendungen in der theoretischen Physik und in den Ingenieurwissenschaften von Bedeutung sind. Beweise von schwierigeren Theoremen werden kaum gebracht, es werden vielmehr einfachere theoretische Ideen diskutiert, oder durch spezielle Fälle plausibel gemacht. Vielfach werden kompliziertere Resultate lediglich zitiert. Ein reiches Aufgabenmaterial illustriert den Text. Auch elementare Resultate aus der Differentialgeometrie sowie der Vektorrechnung

werden erläutert. Das Buch dürfte für Studierende der Physik und Technik einen großen Wert haben, etwas weniger freilich für den theoretischen Mathematiker.

In dem ersten Kapitel werden gewöhnliche Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variablen behandelt, wobei solche Gegenstände wie Pfaffsche Systeme und die Grundlegung der Thermodynamik durch *Carathéodory* berührt werden. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, mit dem Cauchyschen Problem und mit der Methode der Charakteristiken. Das dritte Kapitel ist den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das vierte Kapitel insbesondere der Laplaceschen Differentialgleichung gewidmet. In Kapitel fünf wird eine kurze Darstellung der Wellengleichung gegeben, während Kapitel sechs sich mit der Differentialgleichung der Diffusion beschäftigt. In dem Text sowie in einem Anhange werden verschiedene Fragen der Kurven- und Flächentheorie behandelt. Das Buch hat einen elementaren Charakter und kann ohne besondere Vorkenntnisse gelesen werden. Am Ende findet man eine Liste der Lösungen von der Hälfte der gestellten Probleme. *G. Szegö*, Stanford

Leçons sur les récurrences et leurs applications. Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Von *P. Montel*. X, 268 S. Paris: Gauthier-Villars. 1957. ffr. 4300.

Bei der großen Fülle von Problemen, die mit Rekursionen zusammenhängen, war es ein guter Gedanke, eine zusammenfassende Darstellung dieser Operationen zu geben. Die ersten Kapitel gelten den Zahlenfolgen, deren n-tes Glied — linear oder nichtlinear — durch die vorangehenden gegeben ist; ist das n-te Glied eine holomorphe Funktion des oder der vorangegangenen, so kommt man auf die Begriffe der anziehenden und abstoßenden Punkte, die Schrödersche Funktion und das Theorem von *Poincaré*. Weitere Kapitel beschäftigen sich mit den Kettenbrüchen, besonders den Stieltjes'schen Kettenbrüchen im Zusammenhang mit den Stieltjes'schen Integralen. Die letzten Kapitel bringen die Iteration rationaler Funktionen und speziell solcher mit Fundamentalkreis.

H. Hornich, Graz

Mathematische Statistik. Von *B. L. van der Waerden*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 87.) Mit 39 Textabb., 13 Zahlentafeln, IX, 360 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 46.—, geb. DM 49.60.

Obwohl bereits eine große Anzahl von Büchern über Statistik existiert, unterscheidet sich dieses Buch ganz wesentlich von allen bisher erschienenen. Von den in letzter Zeit in deutscher Sprache herausgekommenen Lehrbüchern über Statistik wenden sich die Bücher von *A. Linder* an Naturwissenschafter, Mediziner und Ingenieure, während das Buch von *L. Schmetterer* rein theoretisch orientiert ist und dem Leser die Grundlagen vermittelt, um auch in die moderne, oft schwierig geschriebene Literatur der mathematischen Statistik einzudringen. *B. L. van der Waerden* hingegen geht von praktischen Anwendungen aus. Er vermittelt dem Leser die Methoden, die zur Lösung der aus der Praxis entnommenen Beispiele mit Vorteil angewandt werden. Man glaube aber ja nicht, daß hier die Methoden in Form von Rezepten mitgeteilt werden. Die Methoden werden eingehend begründet und viele mathematische Hilfsmittel hiezu bereitgestellt. Das Buch kommt nur für Mathematiker in Frage, die sich für Statistik interessieren, oder für Statistiker, die einige mathematische Kenntnisse aufweisen. In bunter Folge wechseln Kapitel über mathematische Hilfsmittel

und Kapitel über statistische Anwendungen ab. Die ersteren sind manchmal sehr knapp geschrieben. Leser, die hier Schwierigkeiten haben, werden aber die Kapitel über statistische Anwendungen ausreichend verstehen. Die zahlreichen Beispiele sind durchwegs aus der Praxis entnommen und gehören der Biologie, Physiologie, Medizin, Psychologie, Physik, Chemie, Astronomie, Geodäsie, Meteorologie, Technik, Industrie und den Sozialwissenschaften an. Die Beispiele werden weitgehend durchgerechnet. Heutzutage wird die mathematische Statistik auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgebaut. *Van der Waerden* stützt sich auf den axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach *Kolmogoroff*. Der Verfasser führt die meisten Beweise durch und verweist nur gelegentlich auf andere Bücher, die der Leser, um tiefer einzudringen, studieren mag, aber keineswegs zum Verständnis des van der Waerdenschen Buches braucht. Ein Leitfaden gibt eine Übersicht über die Kapitel und ihre logische Abhängigkeit. Die Statistik besteht bekanntlich aus zwei Teilen, aus einem beschreibenden und einem theoretischen Teil. Das Buch behandelt vorwiegend die theoretische Statistik. Durch das ganze Buch zieht sich die Kernfrage: Wie weit können sich die aus der Stichprobe berechneten Größen von den entsprechenden idealen Werten entfernen? So wird schon im zweiten Kapitel die Frage behandelt, wie weit die (relative) Häufigkeit h von der Wahrscheinlichkeit p abweichen kann. Der Leser lernt bereits jetzt Vertrauensgrenzen (Konfidenzintervalle) für unbekannte Wahrscheinlichkeiten kennen. Dann folgen Stichprobenverteilungen, die Gaußsche Fehlertheorie und die Ausgleichsrechnung. Klarerweise nimmt in dem Buch die Theorie der Schätzung und die Prüfung von Hypothesen den größten Teil ein. Unter den Methoden zur Schätzung unbekannter Parameter wird die Maximum-Likelihood-Methode besonders ausführlich dargestellt. Ausgangspunkt ist die Methode der kleinsten Quadrate. Alle wichtigen Tests (wie χ^2-Test, t-Test, F-Test) werden an Hand von Beispielen auch dem Leser klar gemacht, der den Ausführungen über die allgemeinen Prinzipien nicht zu folgen vermag. Das Buch bringt auch mehrere parameterfreie Testverfahren (Anordnungstests, insbesondere *Wilcoxon*-Test, X-Test, Rangtests, Spearmansche und Kendallsche Rangkorrelation), und legt die großen Vorteile dieser Tests dar.

Das Buch hebt sich vorteilhaft von allen Büchern über Statistik ab, die mit Rücksicht auf die mathematisch schlecht vorgebildeten Leser nur niedriges Niveau erreichen. Es verdient ob seines reichen Inhalts und seiner anregenden Darstellung stärkste Verbreitung. *N. Hofreiter*, Wien

Nonparametric Methods in Statistics. Von *D. A. S. Fraser*. X, 299 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1957. $ 8.50.

Die Anwendung sogenannter nicht parametrischer Methoden in der Statistik ist verhältnismäßig alt (vgl. z. B. *D. van Dantzig* und *S. Hendryk*, Bericht auf dem 28. Kongreß des Internat. Stat. Instituts). Ihre mathematische Theorie ist aber erst in letzter Zeit vorwärts getrieben worden. Der Verfasser hat zum Ausbau der Theorie manches beigetragen und insbesondere Eigenschaften der geordneten Schätzungen untersucht. Das vorliegende Buch gibt zum ersten Mal eine zusammenfassende Darstellung der mathematischen Theorie (*S. Siegels* Buch ist ja fast ausschließlich auf die Bedürfnisse der Anwendung, insbesondere der Psychologie, gerichtet). Die notwendigen grundlegenden Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie werden im ersten Kapitel meist ohne Beweise, aber mit Literaturangaben zusammengestellt. Dann werden die statistischen Schlußweisen (Schätzungen, Konfidenz- und Toleranzbereiche, Testverfahren) erläutert und deren grundlegende Eigenschaften unter allgemeinen Gesichts-

punkten studiert. Eine ausführliche Behandlung erfahren die Probleme des Schätzens und der Toleranzbereiche erst im vierten Kapitel, die Testtheorie erst im fünften, wobei das Studium der unverfälschten und trennscharfen Teste im Vordergrund steht. Das kurze dritte Kapitel charakterisiert vier typische spezielle Problemgruppen der nichtparametrischen Statistik. Das sechste und siebente Kapitel stehen sachlich in engem Zusammenhang. Jenes beschäftigt sich nämlich mit Grenzwertsätzen und dieses mit der Theorie großer Stichproben (asymptotische Testtheorie). Im sechsten Kapitel hat der Verfasser eine sorgfältige Auswahl getroffen und bringt neben grundlegenden Ergebnissen, die ohne Beweis angegeben werden, insbesondere jene über Grenzverteilung abhängiger zufälliger Größen, die in Zusammenhang mit der asymptotischen Verteilung wichtiger nichtparametrischer Teste von Bedeutung geworden sind (*Hoeffding*, *Wald*, *Wolfowitz* u. a.). Jedem Kapitel sind Aufgaben beigegeben, die bei schwierigeren Problemen mit Anleitungen versehen sind und deren Durcharbeitung dem Leser dringend empfohlen werden kann. Ebenso findet sich am Ende jedes Kapitels eine Bibliographie, die natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Das Buch ist klar und anziehend geschrieben. Es ist selbstverständlich, daß der Autor aus dem großen Stoffgebiet eine Auswahl treffen mußte und ebenso, daß man gegen jede Auswahl Einwände erheben kann. Der Referent kann sich aber doch des Eindrucks nicht erwehren, daß die Forschungen anglo-amerikanischer Herkunft besonders betont werden. Es fehlt z. B. jeder Hinweis auf die Untersuchungen von *Kolmogoroff*, *Smirnoff*, *Gnedenko* u. a. über die Konstruktion von Konfidenzbändern für unbekannte Verteilungsfunktionen oder auf die Arbeiten von *Van Dantzig*, *Hemelrijk* u.a. Es soll jedoch nochmals ausdrücklich betont werden, daß das Werk im übrigen einen ausgezeichneten Eindruck hinterläßt. *L. Schmetterer*, Hamburg

Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. II: Contributions to Probability Theory. Herausgegeben von *J. Neyman*. VIII, 246 S. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1956. $ 6,50.

Die Arbeiten dieses Bandes umspannen einen weiten Bogen, der von den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie im weitesten Sinne bis zu speziellen Anwendungen reicht.

So beschäftigt sich *A. H. Copeland* mit der Formalisierung der Schlußweisen in den experimentellen Wissenschaften und — damit im Zusammenhang — der Wahrscheinlichkeitstheorie im Rahmen einer implikativen *Boole*schen Algebra. Grundlegendes behandelt auch die Arbeit von *K. Menger* und zwar geht es hier vor allem um den Begriff der zufälligen Variablen. *Menger* hat sich ja in letzter Zeit vielfach mit dem oft vage gebrauchten Begriff der Variablen auseinandergesetzt (z. B. in seinem „Calculus"). Den maßtheoretischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die Arbeit von *D. Blackwell* gewidmet. Wenn man wie *Kolmogoroff* ein ganz allgemeines Wahrscheinlichkeitsfeld zugrunde legt, ergeben sich bekanntlich bei der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (*Dieudonné*), der Definition der Unabhängigkeit (*Doob*) sowie bei Betrachtung des allgemeinen Produktmaßes (Beispiel von *Andersen* und *Jessen* zu einem Satz von *Doob*) gewisse Schwierigkeiten. Alle diese Schwierigkeiten werden vermieden, wenn man mit *Blackwell* einen Lusinschen Raum R zugrunde legt, d. i. ein Raum, über dem ein separabler Mengenkörper B existiert und jede über R definierte B-meßbare reellwertige Funktion analytischen Wertevorrat besitzt. — Mit der Theorie der *Markoff*-Ketten beschäftigen

sich die Arbeiten von *K. L. Chung* und *T. E. Harris*. Der erste Autor studiert den Fall eines stetigen stationären Prozesses mit abzählbar unendlich vielen Zuständen und gibt aufbauend auf Resultaten von *Doob* und *Levy* eine formal einwandfreie Theorie. Der zweite Autor untersucht unter Benutzung eigener Methoden und solcher von *Chung* die Frage nach der Existenz eines σ-finiten stationären Maßes für *Markoff*-Ketten mit Zuständen in einem abstrakten Raum. Existenz und im wesentlichen auch Eindeutigkeit eines solchen Maßes kann bei Hinzunahme einer verallgemeinerten Rekurrenzbedingung bewiesen werden. — Das allgemeine Thema der Beiträge von *S. Bochner*, *J. L. Doob*, *K. Itô* und *P. Lévy* sind die stochastischen Prozesse. *Bochner* verallgemeinert und erweitert frühere Untersuchungen (1954), wo er nur Prozesse zweiter Ordnung betrachtet hat und studiert eingehend das Problem der Darstellung stationärer Prozesse durch Linearoperationen. — Der Zusammenhang zwischen der ersten Randwertaufgabe und der Wahrscheinlichkeitstheorie (Irrfahrtenproblem) ist schon lange bekannt. In letzter Zeit sind in dieser Richtung viele neue Zusammenhänge aufgedeckt worden, insbesondere von *Doob* bei seinen Untersuchungen über Martingale. Andererseits ist die *Perron*sche Methode der Ober- und Unterfunktionen von *Brelot* bedeutend weiter entwickelt worden. Der Beitrag von *Doob* behandelt und vertieft diese *Perron-Brelot*sche Methode in wahrscheinlichkeitstheoretischer Hinsicht. — *Robertson* hat seinerzeit die *Taylor*sche Theorie der isotropen Turbulenz invariantentheoretisch gefaßt. *Itô* hat vor kurzem den Begriff des Prozesses zweiter Ordnung unter Heranziehung der *Schwartz*schen Distributionen verallgemeinert und erweitert jetzt den *Robertson*schen Begriff des isotropischen zufälligen Vektorfeldes zu dem des isotropischen zufälligen Currents im Sinne von *de Rham*. *Lévy* gibt eine zusammenfassende und erweiterte Darstellung von seinen Resultaten über die *Brown*sche Bewegung in mehrdimensionalen und allgemeiner in *Hilbert*schen Räumen, die er im Zusammenhang mit der kanonischen Darstellung eines *Gauß*schen Prozesses in letzter Zeit erhalten hat. Mit zufälligen Größen, die Werte in absoluten Räumen annehmen, beschäftigen sich auch die Beiträge von *R. M. Fortet* und *E. Mourier*. Gerade die französischen Wahrscheinlichkeitstheoretiker haben ja in den letzten zehn Jahren auf diesem Gebiet wichtige Fortschritte erzielt. Für zufällige Größen mit Werten in *Banach-Räumen* gibt die Arbeit von *Mourier* darüber eine klare Übersicht. *Fortet* weist zunächst auf die (gemeinsam mit *Blanc-Lapierre*) ersonnene Definition eines allgemeinen *Poisson*schen Prozesses hin, beschreibt dann die kürzlich von *Gelfond* skizzierte allgemeine Theorie der zufälligen Verteilungen und schließt mit einem Beispiel aus dem Telephonwesen.

J. M. Hammersley greift ganz allgemein das Problem der Nullstellen von Polynomen mit zufälligen Koeffizienten auf, dessen Behandlung in Sonderfällen vielfach Beachtung gefunden hat (z. B. *Erdös*, *Kac*, *Littlewood*, *Offord*). Er stützt sich hiebei auf frühere Untersuchungen über mehrwertige zufällige Variable und damit zusammenhängende Konvergenztheoreme. *R. Salem* und *A. Zygmund* haben in einer kurz zurückliegenden größeren Arbeit trigonometrische Reihen mit zufälligen gleichverteilten Vorzeichen untersucht und insbesondere die Größenordnung der Partialsummen studiert. Hier wird die Größenordnung bestimmter „zufälliger Interpolationspolynome" betrachtet. *M. Loève* untersucht Grenzwerttheoreme für die Glieder einer Variationsreihe. Für den Fall, daß die Ausgangsvariablen dieselbe Verteilung haben, liegen viele Untersuchungen vor. *Loève* greift das Problem ganz allgemein im Sinne der modernen Fassung des zentralen Grenzwertsatzes auf und erzielt analoge Resultate. Auf eine Arbeit von *D. G. Mejzler* darf hingewiesen werden.

Die Arbeit von *E. Lukacs* befaßt sich mit der Kennzeichnung von speziellen Verteilungen, insbesondere der Normalverteilung und gibt über die Resultate des Autors hinaus eine umfassende Zusammenstellung von einschlägigen Ergebnissen. *L. Schmetterer*, Hamburg

Einführung in die politische Arithmetik (Finanz-Mathematik). Von *A. Wolf*. Zweite, durchgesehene Auflage. VI, 194 S. Wien: F. Deutike. 1957. S 52.80.

Dies ist ein Buch, welches hauptsächlich für Handelsakademien bestimmt ist, jedoch auch für eine einführende Vorlesung an Hochschulen geeignet erscheint. Inhaltsübersicht: Das Wichtigste über Potenzen, Logarithmen, Reihen. Die einfache Zinsenrechnung. Die Zinseszinsenrechnung (wobei auch die Rentenrechnung einbegriffen ist) sowohl bei dekursiver als auch bei antizipativer Verzinsung. Die Annuitätenrechnung (Schuldtilgung). Kursrechnung, Rentabilität, Konvertierungen. Aufgabensammlung. Zinseszinsentabellen. Logarithmen der Aufzinsungsfaktoren. — Sehr wertvoll sind vor allem die zahlreichen durchgerechneten Beispiele und die Aufgaben am Schluß des Buches (letztere allerdings ohne Lösungen). — Wenn dies auch kein Buch ist, welches tiefergehende (z. B. mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik zu gewinnende) Ergebnisse der Finanz- und Wirtschaftsmathematik bringt, so wird es doch jedem Interessenten von sehr großem praktischem Nutzen sein. *K. Prachar*, *Wien*

Der Begriff des Raumes in der Geometrie — Bericht von der Riemann-Tagung des Forschungsinstitutes für Mathematik. Herausgegeben von *J. Naas* und *K. Schröder*. (Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Mathematik: Heft 1.) Mit 20 Textabb., VIII Tafeln, 317 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. DM 38.—.

Das Kernstück dieses Buches bilden 28 Arbeiten, die bei der von der Deutschen Akademie der Wissenschaften im Oktober 1954 in Berlin veranstalteten Riemann-Feierlichkeit teils vorgetragen wurden, teils als Vorträge vorgesehen waren. Eine von *J. Naas* herrührende Einleitung enthält eine kurze Besprechung der einzelnen Arbeiten in einer den Problemkreisen entsprechenden Anordnung. Danach folgt der Abdruck der Begrüßungsansprache des Vizepräsidenten der Akademie *H. Ertel*. Den Abschluß bilden die Faksimiles zweier an *L. Kronecker* gerichteten Briefe, der eine von *Riemann*, der andere von Riemanns Witwe. Unter der Photographie *Riemanns* wurde als Sterbejahr statt 1866 irrtümlicherweise 1856 angegeben.

Die Riemannsche Geometrie hat nach Bildung des Begriffs der Vektorübertragung und Heranziehung der Variationsrechnung mannigfache Verallgemeinerungen erhalten. Diese allgemeineren differentialgeometrischen Räume sind teils metrischer Natur — hier ist wohl der allgemeinste Fall der der Kawaguchischen Räume — teils handelt es sich um die affine, projektive oder konforme Theorie gewisser allgemeiner metrischer Räume. Dabei werden auch Mannigfaltigkeiten von unendlicher Dimension in Betracht gezogen. In jüngster Zeit sind auch synthetisch-axiomatische und topologische Gesichtspunkte herangezogen worden, die teils zu neuen Erkenntnissen in bekannten Raumstrukturen, teils zu neuen Raumtypen führten. Zu diesem Themakreis gehören die Arbeiten von *A. D. Alexandrow*, *H. Freudenthal*, *H. Haimovici*, *E. Hölder*, *K. Schröder*, *J. Tits*, *O. Varga* und *G. Vrănceanu*. Die Beziehung zur Relativitätstheorie sowie andere physikalische Anwendungen behandeln die Arbeiten von *L. Infeld*, *G. Lampariello*, *P. Libois*, *H. Papapetrou*, *H. Rund* und *F. Vyčichlo*,

Beziehungen der Riemannschen Geometrie zur Funktionentheorie enthalten die Arbeiten von *L. K. Hua* und *N. Obreschkoff*. Über isotrope Geometrie, Gruppengeometrien im Kleinschen Sinne, sowie spezielle Untersuchungen in euklidischen und projektiven Räumen berichten die Arbeiten von *W. Blaschke*, *E. Čech*, *M. Fiedler*, *G. Klapka*, *Z. Nadenik* und *K. Strubecker*. Algebraische Geometrie unter Berücksichtigung Riemannscher Ideen behandelt *F. Severi*. Ein Vortrag von *B. Sz. Nagy* bezieht sich auf den Hilbertschen Raum, während *O. Haupt* eine Übersicht über die Entwicklung des Integralbegriffes gibt. Eine Analyse des Raumbegriffs enthalten die Arbeiten von *G. Alexits* und *K. Kuratowski*.

O. Varga, Debrecen

Ergänzungsheft zum Lehrbuch der Darstellenden Geometrie für technische und gewerbliche Lehranstalten. Von *K. Vanek*. Mit 54 Textabb. 55 S. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky. 1957.

Zwei Gesichtspunkte waren bei der Abfassung dieses Ergänzungsheftes maßgebend: Erstens jene Kapitel zu behandeln, die für den Techniker von Bedeutung sind und im Lehrbuch — um im Rahmen des Lehrplans zu bleiben — nicht oder nur wenig behandelt werden konnten. Zweitens die speziellen Bedürfnisse des Technikers in konstruktiver Hinsicht und im Hinblick auf die Anwendungen zu berücksichtigen.

Im ersten Abschnitt wurden die schiefe Axonometrie samt Sonderfällen und das *Eckhart*sche Einschneideverfahren behandelt. Im zweiten Abschnitt wurde auf die zugeordneten Normalrisse und ihre in Europa und Amerika üblichen Anordnungen eingegangen. Der dritte Abschnitt bringt Ergänzungen aus der normalen Axonometrie, der vierte Abschnitt Ergänzungen, die sich auf den Torus, die Schraublinie und die Schraubflächen beziehen und Ergänzungen aus der kotierten Projektion, der Dachausmittlung und der Perspektive.

Die nicht leichte Aufgabe, im Rahmen der Ergänzungen die geeignete Auswahl zu treffen, hat der Verfasser mit Geschick gelöst.

J. Laub, Wien

Projektive Geometrie I und II. Von *G. Grosche*. (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 7 und 8.) Teil I: Mit 45 Textabb., 204 S. DM 10.20. — Teil II: Mit 46 Textabb., 196 S. DM 9,10. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957.

Diese moderne Darstellung der projektiven Geometrie, die neben der analytischen Methode auch gelegentlich synthetische Überlegungen verwendet, gibt einen guten, geordneten Überblick über die grundlegenden Begriffsbildungen und Ergebnisse dieser zentralen geometrischen Disziplin. Nach einer historischen Einleitung und einem Hinweis auf die gruppentheoretische Begründung der Geometrie wird zunächst aus dem Anschauungsraum der projektive Raum entwickelt. Der erste Band bringt einen Aufbau der projektiven Geometrie im Grundgebilde 1. und 2. Stufe, der zweite Band enthält die projektive Theorie der Kegelschnitte und Grundzüge der projektiven Geometrie des n-dimensionalen Raumes; der Ausgangspunkt dafür ist der Begriff des Vektorraumes und die Untersuchung der zugehörigen Automorphismengruppe. Obwohl die Darstellung als Einführung gedacht ist, unterläßt es der Autor nicht, an vielen Stellen Ausblicke auf Probleme der höheren Geometrie sowie auf Querverbindungen zur Algebra und Grundlagenfragen der Geometrie hinzuweisen; die projektiven Modelle der nichteuklidischen Geometrien werden allerdings nicht

erwähnt. Die sonst übliche Stoffauswahl ist vor allem dadurch verändert, daß nach der ziemlich ausführlichen Darstellung der projektiven Geometrie der Ebene die projektive Geometrie des Raumes vollständig übergangen wird und der Autor sofort den n-dimensionalen Raum betrachtet. Die zahlreichen, mit ausführlichen Lösungen versehenen Aufgaben und die klaren, übersichtlichen Abbildungen ermöglichen es auch dem Anfänger, den gebotenen Stoff ohne größere Schwierigkeiten aufzunehmen und zu verarbeiten.

H. Brauner, Wien

Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Von *E. Kruppa*. Mit 75 Textabb., VII, 191 S. Wien: Springer-Verlag. 1957. Geb. S 234.—, DM 39.—, $ 9.30, sfr. 39.90.

Eine gründliche differentialgeometrische Schulung bildete seit jeher einen wesentlichen Bestandteil der Ausbildung der Lehramtskandidaten für Mathematik und Darstellende Geometrie in Österreich. Dem Verfasser gebührt dabei das Verdienst, mit Nachdruck für die nötige Strenge eingetreten und mit mancherlei auf diesem Gebiet verbreiteten Unfug mit „unendlich kleinen Größen" und „benachbarten Elementen" aufgeräumt zu haben, ohne auf die anschauliche geometrische Komponente zu verzichten. Am Ende seiner über ein Vierteljahrhundert währenden, an Mühen wie an Erfolgen reichen Tätigkeit an der Wiener Technischen Hochschule beschert er uns nun gleichsam als Vermächtnis ein Buch, das seinen Bestrebungen eine dauernde Nachwirkung sichern wird.

Das Werk gliedert sich in zwei an Umfang ungefähr gleiche Teile: Einen analytischen, der einen soliden Unterbau für die Differentialgeometrie der Kurven, Flächen und Strahlmannigfaltigkeiten im euklidischen Raum von drei Dimensionen legt, und einen „konstruktiven", der ergänzend durch unmittelbare geometrische Betrachtungen ein vertieftes, inniges Verhältnis zu den einzelnen Studienobjekten zu erzielen trachtet und natürlich auch die den darstellenden Geometer interessierende zeichnerische Behandlung der einschlägigen Fragen entsprechend pflegt. — Der erste Teil bringt, nach kurzer Zusammenstellung der Elemente der Vektorrechnung, etwa in der Art von *W. Blaschke* die klassische Theorie der Raumkurven und Flächen, darüber hinaus eine eigenständige Theorie der Strahlflächen, beruhend auf der Verwendung des aus Erzeugender, Zentraltangente und Zentralnormale gebildeten begleitenden Dreibeins, und schließt mit den wichtigsten Begriffsbildungen bei Strahlkongruenzen und Strahlkomplexen, wobei dem linearen Strahlkomplex gebührender Platz eingeräumt wird. — Der zweite Teil bietet zunächst vor allem darstellend-geometrische Ergänzungen zur Kurven- und Flächentheorie, darunter erstmals die Anwendung der kubischen Indikatrix eines Flächenpunktes (nach einer vom Verfasser angeregten Dissertation von *R. Groiß*), ferner Ausführungen über spezielle Kurven und Flächen (u. a. Dreh-, Schieb- und Schraubflächen und das Plücker-Konoid) sowie über das konforme und projektive Bild der auf den Flächen konstanter Krümmung herrschenden nichteuklidischen Geometrien; das Schlußkapitel endlich befaßt sich mit den differentialgeometrischen Grundlagen der ebenen, sphärischen und räumlichen Kinematik.

Das originelle und inhaltsreiche Buch, das präzisen Ausdruck, formale Eleganz und wirklichen geometrischen Gehalt vereint, ist nicht nur zum Studium ausgezeichnet geeignet, sondern vermittelt auch dem Kenner manche neuen Gesichtspunkte und Tatsachen.

W. Wunderlich, Wien

Differentialgeometrie I. Von *A. P. Norden*. Mit 76 Textabb. 134 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 7.60.

Das vorliegende Buch ist der erste Teil der *Norden*schen Differentialgeometrie in einer von *R. Sulanke* besorgten Übersetzung aus dem Russischen. Es beschränkt sich bewußt auf den elementaren Stoff dieses Gebietes und versteht es mit meisterhaftem Geschick, den Leser ausgehend von einfachsten Fragestellungen an die Theorie heranzuführen. Etwas ungewohnt ist stellenweise die Terminologie; so wird z. B. konsequent mit dem Begriff des unendlich kleinen Vektors operiert. — Nach einer kurzen Darstellung der Vektoranalysis wird die Theorie der Raumkurven etwa bis zu den *Frenet*schen Formeln, die natürlichen Gleichungen einer Kurve und die abwickelbaren Flächen besprochen. Die Textfiguren beziehen sich meist auf die ungefähr 130 Aufgaben, denen — im Gegensatz zur russischen Auflage dieses Buches — im Anhang kurze Lösungsanleitungen beigegeben sind (die Abbildung 35 ist übrigens verbesserungsbedürftig).

Auffallend ist der Wunsch des Autors, unter möglichster Beschränkung des Kalküls den geometrischen Gehalt in den Vordergrund treten zu lassen. Schon aus diesem Grunde kann man dem Erscheinen des zweiten Teiles mit Spannung entgegensehen. *H. Brauner*, Wien

The Theory of Lie Derivatives and its Applications. Von *K. Yano*. (Bibliotheca Mathematica: Vol. III.) X, 299 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1957. hfl. 30.50.

W. Slebodzinski hat im Jahre 1931 einen neuen Differentialoperator eingeführt, der auf Skalare, Vektoren, Tensoren und affine Zusammenhänge anwendbar ist. Dieser Operator, der heute nach *D. van Dantzig* als Lie-Ableitung bezeichnet wird, wurde später auch für beliebige geometrische Objekte erklärt und hat sich als sehr wertvolles Hilfsmittel für das Studium differentialgeometrischer Räume erwiesen. Das vorliegende Buch stellt die Theorie der Lie-Ableitungen und ihre Anwendung auf Transformationsgruppen von Räumen systematisch dar. In der Bezeichnungsweise schließt sich der Verfasser dabei an die zweite Auflage des „Ricci Calculus" von *Schouten* an.

Nach einem einführenden Kapitel wird die Lie-Ableitung eines allgemeinen geometrischen Objektes definiert. In den folgenden Abschnitten wird sie dann verwendet zur Untersuchung von Automorphismengruppen verschiedener Typen von Räumen: Zunächst werden Invarianzgruppen geometrischer Objekte studiert, dann Bewegungsgruppen eines n-dimensionalen Riemannschen Raumes V_n, Gruppen affiner Bewegungen eines n-dimensionalen Raumes mit linearem Zusammenhang L_n bzw. eines Raumes mit symmetrischem linearem Zusammenhang A_n, Gruppen projektiver Bewegungen in A_n-Räumen und Gruppen konformer und homothetischer Bewegungen in Riemannschen Räumen; weiter werden Transformationsgruppen von Finsler-Räumen, Räumen von Bahnen und Räumen von „k-spreads" betrachtet. Es folgt ein Kapitel über Lie-Ableitungen in einem kompakten orientierbaren Riemann-Raum und ein Kapitel über Lie-Ableitungen in einem fast komplexen Raum. Abschließend wird noch eine Übersicht über die in jüngster Zeit auf den im Buch behandelten Gebieten erzielten Fortschritte gegeben.

Das wertvolle Werk zeigt sehr deutlich, wie nützlich die Verwendung der Lie-Ableitung bei differentialgeometrischen Untersuchungen ist. Man kann erwarten, daß es vielfache Anregungen zu weiterer Forschungsarbeit geben wird. *W. Nöbauer*, Wien

Colloque de Topologie algébrique. Tenu à Louvain les 11, 12, et 13 juin 1956. (Centre Belge de Recherches Mathématiques.) 193 S. Liège: G. Thône. — Paris: Masson & Cie. 1957. bfr. 375, ffr. 3000.

Die algebraische Topologie ist eines der Teilgebiete der Mathematik, über welche Kolloquien vom belgischen CBRM abgehalten wurden. Die bereits sehr zahlreichen im Druck erschienenen Berichte über diese Tagungen geben einen guten Einblick über den derzeitigen Stand und die verschiedenen Richtungen der Forschung in vielen Teilgebieten unserer Wissenschaft. So begrüßen wir auch das Erscheinen dieses neuen Forschungsberichtes, welcher sicherlich viele Anregungen zu neuen Arbeiten vermitteln wird. Die Titel der Vorträge: *P. J. Hilton*, Verallgemeinerungen der Hopfschen Invariante. *R. Thom*, Die Homologie der Funktionalräume. *B. Eckmann*, Homotopie und Dualität. *S. Mac Lane*, Homologie der Ringe und Moduln. *J. F. Adams*, Über die „Cobar"-Konstruktion. *W. Whitehead*, Die „Homologie Suspension". *E. Vesentini*, Geometrische Konstruktion der *Chern*schen Klassen einiger komplexer *Graßmann*scher Mannigfaltigkeiten. *R. Deheuvels*, Charakteristische Klassen einer stetigen Abbildung. *P. Dedecker*, Kohomologie-Gruppoide mit nichtabelschen Koeffizienten und Fiberräume. *G. Papy*, Beziehungen zwischen den Komplexen von *de Rham* und *Alexander*. *G. Hirsch*, Gewisse Homologieoperationen und die Kohomologie der Fiberräume. *K. Prachar*, Wien

Grundzüge der kombinatorischen Topologie. Von *L. S. Pontrjagin*. (Hochschulbücher für Mathematik: Bd. 29.) V, 133 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956.

Dieses Buch ist die deutsche Übersetzung eines in russischer Sprache erschienenen Werkes des bekannten Forschers; die Übersetzung besorgte *E. Hähnel*, die wissenschaftliche Redaktion *Erika Pannwitz*. Da es aus einer einsemestrigen Vorlesung entstanden ist, ist der Umfang des Buches nicht allzu groß. Dagegen kann man wohl sagen, daß der vorhandene Raum in ganz vorbildlicher Weise dazu ausgenützt wurde, dem Lernenden ein Optimum an Wissen und Können zu vermitteln. Die Auseinandersetzung der einzelnen Ergebnisse und Beweise erfolgt mit kaum zu überbietender Darstellungskunst. An Vorkenntnissen werden nur einige wenige aus der Punktmengenlehre und der Theorie der abelschen Gruppen vorausgesetzt. Die drei Teile des Buches sind wie folgt überschrieben: 1. Komplexe und ihre *Betti*schen Gruppen. 2. Die Invarianz der *Betti*schen Gruppen. 3. Stetige Abbildungen und Fixpunkte. Im ersten Teil findet sich auch der *Menger-Nöbeling*sche Einbettungssatz. Im zweiten Teil wird die Methode der simplizialen Approximationen auseinandergesetzt, welche zum Beweis der Invarianz der *Betti*schen Gruppen dient. Hier findet sich auch das *Spernersche* Lemma und der Fixpunktsatz von *Brouwer*. Der dritte Teil gipfelt in der bekannten *Hopf*schen Verallgemeinerung der *Euler-Poincaré*schen Formel, welche wichtige Ergebnisse über die Fixpunkte stetiger Abbildungen liefert. Ein kurzes Literaturverzeichnis der wichtigsten Begriffe wurde beigelegt. — Der Verfasser bezeichnet im Vorwort als einen Mangel des Buches, daß es fast keine Beispiele enthält. Ein kleiner Mangel besteht vielleicht auch in dem Fehlen von Zitaten im Text. Man wird aber diese Mängel gerne in Kauf nehmen, wenn dafür eine Klarheit, Genauigkeit und Vollständigkeit der Beweise geboten wird, wie man sie kaum in einem anderen Lehrbuch dieses Umfanges findet. Wohl die beste bisher erschienene Einführung in die kombinatorische Topologie. (Einige kleinere Druckfehler: S. 19, Z. 4: $\overline{H}^s$ statt $\overline{H}_s$, Z. 10: R^{r+1} statt

R^{n+1}; S. 49, Z. 13: $A^r_{\alpha r}$ statt $A_{r\alpha r}$, Z. 15: A^1_r statt A_{r_t}; S. 65, Z. 7 v. u.: S^{r-1} statt S^{n-1}; S. 104, Z. 14: Simplexen statt Simplexe; S. 119, Z. 15 H^r_0 statt $\hat{H}^r_0$).

K. Prachar, Wien

The Hypercircle in Mathematical Physics. A Method for the Approximate Solution of Boundary Value Problems. Von *J. L. Synge*. Mit zahlreichen Textabb., XII, 424 S. Cambridge: At the University Press. 1957. 70 s.

Das Buch ist eine zusammenfassende Darstellung einer Methode, welche der Verfasser in mehreren Arbeiten entwickelt hat. Es handelt sich um die Lösung von Randwertaufgaben, die aus Variationsproblemen hervorgehen. Die Lösung kann als Punkt in einem Funktionenraum mit einer gewissen Metrik versehen, aufgefaßt werden. Ist diese Metrik positiv-definitiv, wie dies bei den Aufgaben der Potentialtheorie der Fall ist, so liegt die Lösung im Inneren oder auf dem Rande eines Hyperkreises, dessen Mittelpunkt und Radius bekannt sind. Der Mittelpunkt ist dann eine Näherungslösung mit bekanntem mittlerem quadratischem Fehler. Durch Verfeinerung der Methode können bessere Näherungslösungen bestimmt werden. Die Sache ist schwieriger bei indefiniter Metrik wie bei der Wellengleichung. Daher beschäftigt sich das Buch vor allem mit dem definiten Fall. Nach einer ausführlichen Behandlung des Funktionenraumes setzt der Verfasser seine Methode auseinander und behandelt eine Reihe von Beispielen (Potentialtheorie, Torsion, Biharmonische Gleichung usw.). Die Methode ist sehr instruktiv und leicht anwendbar. Sie hat daher schon wichtige Anwendungen gefunden. Das Buch ist außerordentlich leicht zu lesen und setzt nur die einfachsten Kenntnisse aus Analysis voraus.

E. Hlawka, Wien

Vector Analysis. Von *L. Brand*. Mit 86 Textabb., 282 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1957. $ 6.—.

Im Jahre 1948 erschien vom gleichen Verfasser im gleichen Verlag eine ausführliche Einführung in die Vektor- und Tensoranalysis. Die vorliegende Darstellung der Vektoranalysis ist wesentlich einfacher gehalten und legt insbesondere Wert auf eine ausführliche Darstellung der grundlegenden Begriffe. So werden in einem einleitenden ersten Kapitel die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Vektoren nebst mannigfachen geometrischen Anwendungen ausführlich erörtert. Daran schließen sich in einem zweiten Kapitel Ausführungen über linienflüchtige Vektoren mit einer Anwendung auf die Statik des starren Körpers an. Kapitel drei untersucht die Vektoren als Funktionen einer skalaren Veränderlichen mit Anwendungen in der Geometrie und in der Kinematik von Massenpunkten. In einem vierten Kapitel werden die Differentialinvarianten von Vektoren (Gradient, Divergenz, Rotation), in einem fünften Kapitel die Integraltheoreme (Sätze von *Gauß*, *Green*, *Stokes*) ausführlich erörtert. Die gewonnenen Ergebnisse werden in den Kapiteln sechs bis acht zur Formulierung und Lösung von Problemen der Mechanik, Hydrodynamik und der Elektrizitätslehre verwendet. Mit einer Einführung in die Theorie der mehrdimensionalen Vektorräume (einschließlich des *Hilbert*-Raumes) schließt das Buch. Die Darstellung ist klar und leicht verständlich. Zur Schreibweise sei bemerkt, daß das skalare Produkt zweier Vektoren durch den Punkt ($\mathfrak{A} . \mathfrak{B}$), das vektorielle durch das Zeichen $\times$ ($\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$) und das dyadische durch Nebeneinanderschreiben ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$) bezeichnet wird. Im Gegensatz zu den meisten englischen

und amerikanischen Autoren wird für die Rotation eines Vektors rot $\mathfrak{A}$ geschrieben, im Einklang mit den Autoren des europäischen Festlandes. Jedem Kapitel ist eine Anzahl von instruktiven Aufgaben angeschlossen, deren Lösungen sich in einem Anhang finden. In Anbetracht der hohen didaktischen Qualitäten des Buches wird es von Studenten der Mathematik und Physik, der Naturwissenschaften und der Ingenieurwissenschaften sicherlich mit großem Gewinn benützt werden können. *Th. Sexl*, Wien

Theoretische Physik. Eine Einführung. Zweiter Band. Von *F. Hund.* Dritte, überarbeitete und ergänzte Auflage des zweiten und dritten Bandes der Einführung in die theoretische Physik. Mit 177 Textabb., X, 364 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. DM 27.40, geb. DM 29.40.

Mit dem vorliegenden zweiten Band ist nunmehr die Einführung in die theoretische Physik des Verfassers vorläufig abgeschlossen. Wie schon bei der Besprechung der Neuauflage des ersten Bandes betont wurde, fehlt im Gesamtplan des Werkes die Elastizitätstheorie und die Hydrodynamik, die aber in einer „Einführung" unbedingt ihren Platz finden müßten. Der vorliegende Band, der die Elektrizitätslehre, die Optik und die spezielle Relativitätstheorie umfaßt, bringt zunächst die Theorie der Elektrizität in induktiver Darstellung, indem von den statischen Feldern (Kap. I—III) zu den stationären (Kap. IV) und quasistationären (Kap. V) und von da zu den nichtstationären Feldern (Kap. VI) aufbauend vorgeschritten wird. Bemerkenswert sind die klaren Ausführungen des Paragraphen 32 über die geometrische Natur der elektromagnetischen Größen. In dem Kap. I über die statischen elektrischen Felder finden sich auch Ausführungen über die Differentialinvarianten eines Vektors, nämlich grad, div, rot. Die Optik beginnt mit den Kap. VII und VIII über die Ausbreitung von Lichtstrahlen und Lichtwellen, daran schließt sich die Deutung der Lichtwellen als elektromagnetischem Vorgang (Kap. IX). Ausführungen über Kristalloptik (Kap. X) und die Theorie der Dispersion (Kap. XI) beschließen die Darstellung der theoretischen Optik, die, wie im Vorwort ausdrücklich betont, sich auf das wesentlichste beschränkt. Gegenüber den früheren beiden Auflagen neu hinzugefügt ist das Kap. XII über die spezielle Relativitätstheorie. Mit einem sehr lesenswerten wissenschaftsgeschichtlichen Anhang endet das Buch.

Durch den Übergang des Gesamtwerkes in den Teubnerschen Verlag hat der vorliegende Band, wie schon die vorausgegangenen beiden Bände 1 und 3, das normale Format, das dem Auge wohlvertraute Druckbild und den schönen Leineneinband der Teubnerschen Verlagswerke erhalten. Alle Studenten, denen die Einführung in die theoretische Physik von *Cl. Schaefer* zu umfangreich ist, werden gerne nach dem kürzeren, so außerordentlich klar abgefaßten Werk von *Hund* greifen. *Th. Sexl*, Wien

Einführung in die Theorie der Elektronenoptik. Von *J. Picht.* Zweite, erweiterte Auflage. Mit 70 Textabb., VIII, 274 S. Leipzig: J. A. Barth. 1957. DM 29.20, geb. DM 31.—.

Wie die erste Auflage, die 1939 erschien, gliedert sich auch die zweite Auflage in fünf Kapitel, zu denen nur ein kurzes 6. Kap. hinzugekommen ist. Auch die Paragrapheneinteilung ist dieselbe geblieben. Sechs neu aufgenommene Paragraphen (6a, 14a, 20a, 21a, 30a und 32) sind durch Zusatz eines a gekennzeichnet. In den beiden ersten einleitenden Kapiteln werden die Grundlagen der Korpuskulartheorie der Elektrostrahlen (Elektronenbewegung in statischen elektrischen

und magnetischen Feldern) in einem Umfange behandelt, in dem sie in diesem Buche benötigt werden. Hierauf wird gezeigt, daß sich aus dem Hamiltonschen Prinzip eine Gleichung herleiten läßt, die mit dem Fermatschen Prinzip der Lichtoptik identisch ist. Im 3. Kapitel wird auf die grundsätzlichen Analogien in dem Verhalten von Licht und Elektronenstrahlen eingegangen und der Nachweis erbracht, daß es tatsächlich elektronenoptische Linsen, Prismen und Spiegel gibt. In den beiden folgenden ausführlichsten Kapiteln werden die Abbildungsgesetze (Linsenformel, Helmholtzscher Satz usw.) und die Abbildungsfehler erörtert. Das neu hinzugekommene 6. Kap. ist der Wellen- und Beugungstheorie elektronenoptisch abbildender Systeme gewidmet.

Die vorliegende Darstellung ist dadurch ausgezeichnet, daß die wesentlichen Ergebnisse möglichst auf mehrere verschiedene Weisen abgeleitet werden. So werden die Abbildungsfehler einerseits aus dem Eikonal (nach *W. Glaser*), andererseits aus den Bahngleichungen direkt bestimmt (nach *O. Scherzer*). Dadurch wird jede Einseitigkeit vermieden. Daß sich das Buch als außerordentlich brauchbare Einführung in das Gebiet der theoretischen Elektronenoptik bewährt hat, beweist nicht nur das Erscheinen einer zweiten Auflage, sondern auch die Tatsache, daß es in der Literatur das ehrende Signalement EThEO („Einführung in die Theorie der Elektronenoptik") erhalten hat. *Th. Sexl*, Wien

Fünfzig Jahre Relativitätstheorie. Herausgegeben von *A. Mercier* und *M. Kervaire*. (Helvetica Physica Acta: Supplementum IV.) 286 S. Basel: Birkhäuser-Verlag. 1956. sfr. 36.—, DM 36.—.

Im Jahre 1905 veröffentlichte Albert *Einstein* von Bern aus, wo er damals am Patentamt tätig war, in den Annalen der Physik seine grundlegende Abhandlung „Zur Elektrodynamik bewegter Körper". Zum 50jährigen Jubiläum des Erscheinens dieser Abhandlung veranstaltete die Universität Bern und die schweizerische physikalische Gesellschaft vom 11. bis 16. Juli 1955 eine Konferenz über Relativitätstheorie in Bern, deren Eröffnungsansprachen, Referate, kurze Mitteilungen und Diskussionen in den wissenschaftlichen Sitzungen und deren Ansprachen zur offiziellen Jubiläumsfeier in einem Supplementband der schweizerischen physikalischen Zeitschrift „Helvetica Physica Acta" auf 286 Seiten wiedergegeben werden. Die wissenschaftlichen Ergebnisse der Konferenz wurden in einem Schlußwort des Präsidenten der Konferenz, Prof. Dr. *W. Pauli* ohne Anspruch auf Vollständigkeit zusammengefaßt (S. 261—267). Bezüglich der kosmologischen Frage hat sich dabei das neue Resultat aufgezeigt, daß nunmehr keine Diskrepanz zwischen den experimentellen Resultaten und dem alten *Friedmann-Lemaitre*schen Modell besteht. Es gibt keine Spuren im Universum, die auf ältere Zeiten als auf 5.10^9 Jahre hinweisen. Bezüglich einer Veränderlichkeit der Gravitationskonstante ist *Pauli* der Ansicht, daß nach den Diskussionen der Konferenz nicht mehr viel Gründe für eine solche vorhanden sind und er zweifelt, daß man mit der Annahme einer solchen Veränderlichkeit auf einer richtigen Spur sei. *Th. Sexl*, Wien

Jets, Wakes, and Cavities. Von *G. Birkhoff* und *E. H. Zarantonello*. (Applied Mathematics and Mechanics: Volume 2.) Mit Textabb., 11 Tafeln, XII, 353 S. New York: Academic Press Inc. Publishers. 1957. Geb. $ 10.—.

Das vorliegende Buch stellt einen systematischen Bericht über die wichtigsten Entdeckungen der letzten 100 Jahre auf den im Titel des Buches genannten Erscheinungsgebieten dar. Physiker, angewandte und reine Mathematiker, und Ingenieure verhalfen durch ihre Forschungen zu den neuen Erkenntnissen.

Während aber die reinen Mathematiker sich fast ausschließlich Existenz- und Eindeutigkeitsfragen in der Theorie der idealen Flüssigkeiten zuwandten (Kap. VII), die Physiker hingegen die Erscheinungen bloß unter den Bedingungen des Labor-Experimentes untersuchten, die Ingenieure andererseits unter Verzicht auf einheitliche theoretische Gesichtspunkte nur die praktische Anwendung im Auge hatten, versuchen es die beiden Autoren, die von den genannten Spezialisten erzielten Forschungsresultate unter einheitlichen Gesichtspunkten zu sichten und zu erklären. Zunächst werden in einleitenden Abschnitten (Kap. I) die im Titel genannten Phänomene (Strahlen, Totwasser, Hohlräume) definiert und durch hervorragend schöne photographische Aufnahmen illustriert. Dann wird gezeigt, daß die Erscheinungen bei den Flüssigkeitsstrahlen in Luft und bei der Bildung von Totwassern und Hohlräumen in Wasser als Grenzschichtphänomene aufgefaßt und quantitativ theoretisch beschrieben werden können (Kap. II—XI), zumindest für den Fall, daß die Reibung eben auf eine Grenzschicht beschränkt bleibt. Flüssigkeitsstrahlen in Flüssigkeiten (bzw. Gasstrahlen in einem Gas) und die entsprechenden Totwasserbildungen wären jedoch auf Grund der *Stokes-Navier*schen Gleichungen zu beschreiben und gestatten nur in seltenen Fällen eine exakte Behandlung (Kap. XII—XIV). Allerdings zählen dann diese Resultate zu den faszinierendsten Ergebnissen der Hydrodynamik (vgl. insbesondere das schöne Kap. XIII). Dem referierenden Charakter des Buches entsprechend ist die Lektüre desselben ziemlich schwer und hat selbstverständlich eine gründliche Kenntnis der klassischen und moderne Hydrodynamik zur Voraussetzung. Bewundernswert bleibt aber die ungeheure Belesenheit der Autoren und ihr Geschick, die so differenten Erscheinungen nach einheitlichen Gesichtspunkten geordnet darzustellen.

Th. Sexl, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik

Eine Einführung in die Theorien von A. Tarski und R. Carnap. Von **Wolfgang Stegmüller**, Tit. ao. Professor an der Universität Innsbruck. X, 328 Seiten. Gr.-8°. 1957.

Ganzleinen S 198.—, DM 33.—, sfr. 33.80, $ 7.85

Semantische Begriffsbildungen und Methoden spielen in den modernen philosophischen Untersuchungen, insbesondere innerhalb der Erkenntnistheorie und Grundlagenforschung, eine zunehmende Rolle. Auch in der formalen Logik hat sich die Auffassung vom Primat der semantischen vor der axiomatischen oder syntaktischen Betrachtungsweise weitgehend durchgesetzt. Ein ernsthaftes Studium der modernen wissenschaftlichen Philosophie ist daher ohne gründliche semantische Kenntnisse nicht mehr möglich. Die vorliegende Darstellung gibt eine Einführung in das gesamte Problemgebiet der Semantik, die von den beiden Logikern *A. Tarski* und *R. Carnap* systematisch zu einer exakten Wissenschaft ausgebaut worden ist. Der Verfasser war bemüht, den Leser ebenso in technische Details einzuführen wie den Zusammenhang mit traditionellen philosophischen Fragestellungen herzustellen.

In einem ersten Teil werden die Prinzipien des Aufbaues semantischer Systeme geschildert. Ferner wird darin eingehend die Frage diskutiert, wie ein exakter und inhaltlich adäquater Wahrheitsbegriff in formalisierte Sprachen eingeführt werden könne, sowohl in Sprachen von elementarem Charakter als in solche von komplizierter logischer Struktur. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit der L-Semantik, in welcher das Gebiet des rein Logischen vom Nichtlogischen abgegrenzt und ein neuer Einblick in die Natur logischer Zusammenhänge gewährt wird. Es folgt eine ausführliche Schilderung und Diskussion der von *Carnap* entwickelten neuen Methode der Bedeutungsanalyse. Ein eigenes Kapitel ist der logischen Syntax und der Beziehung zwischen formalen logischen Kalkülen und semantischen Interpretationen dieser Kalküle gewidmet. In einem umfangreichen letzten Abschnitt werden die Anwendungen der Semantik in Logik, Metamathematik, Erkenntnislehre und Theorie des induktiven Schließens aufgezeigt. Ferner werden bisher vorgebrachte Einwendungen gegen die Semantik einer Kritik unterzogen und einige offene Probleme erörtert.

Acta Physica Austriaca.

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von **Fritz Regler**, Wien, und **Hans Thirring**, Wien. Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz.

Zuletzt erschien:

Band 11, Heft 2. (Ausgegeben im August 1957.) Mit 69 Abbildungen. 160 Seiten. 1957. S 234.—, DM 39.—, sfr. 39.90, $ 9.30

Inhaltsverzeichnis: **Ortner G.** In memoriam Gerhard Kirsch. — **Gustafson, W. A.** and **M. Z. v. Krzywoblocki.** On Multiplicity Theorems and an Exact Solution in Diabetic Flow. Part. I. — **Ledinegg, E., P. Urban** und **L. Breitenhuber.** Zur Theorie und Meßtechnik des Relaxationsbereiches von Dipolmolekülen. — **Haefer, R.** und **A. A. Mohammed.** Über die Bildung dünner Schichten in der selbständigen elektrischen Gasentladung im transversalen Magnetfeld. — **Haefer, R.** und **A. A. Mohammed.** Die selbständige elektrische Gasentladung im Magnetfeld als Hilfsmittel der übermikroskopischen Präparationstechnik. — **Lihl, F.** Wirkung nichtmetallischer Einschlüsse in weichmagnetischen Werkstoffen. — **Hofmann, H.** Über die Deutung der Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe elektrischer und magnetischer Mengen. — **Pfahl, A.** Über Spektren und Nachleuchtdauer von Zementphosphoren. — **Buchbesprechungen.**

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien das erste Lehr- und Nachschlagebuch über Atomreaktoren in deutscher Sprache:

Physik und Technik der Atomreaktoren

Von

Ferdinand Cap

Tit. ao. Professor an der Universität Innsbruck

Mit 100 Textabbildungen, XXIX, 487 Seiten. Gr.-8°. 1957

Ganzleinen S 384.—, DM 64.—, sfr. 65.50, $ 15.25

Seit der Genfer Atomkonferenz ist das Interesse für Atomreaktoren in Kreisen der Wissenschaft und Industrie sehr stark angewachsen. Gleichzeitig wird es jedoch immer schwieriger, aus der Flut von Einzelarbeiten und aus den spärlichen Buchveröffentlichungen, die bisher in Amerika erschienen sind, ein abgerundetes Bild über Theorie, Physik und Technik der Atomreaktoren zu bekommen. Professor *Cap*, der wohl als einer der ersten in Europa schon im Studienjahr 1950/51 an der Universität Innsbruck Vorlesungen über Reaktorphysik gehalten hat und der in verschiedenen Reaktorzentren Europas Erfahrungen sammeln konnte, gibt mit diesem Lehrbuch, dem ersten seiner Art in deutscher Sprache, einen Überblick über den derzeitigen Stand des theoretischen, experimentellen und technischen Wissens über Atomreaktoren. Ausgehend von den kernphysikalischen Grundlagen, behandelt der Verfasser Theorie, Bau, Betrieb und Sicherheit solcher Anlagen. Ein besonderer Abschnitt bringt in übersichtlicher Darstellung eine eingehende Beschreibung der bisher entwickelten Reaktortypen. Daran schließen sich Kapitel über die Anwendung der Reaktoren, über Strahlungsschutzrecht, Organisationsfragen und Atom-Völkerrecht. Die wissenschaftliche Literatur konnte bis zum Ende des Jahres 1956 berücksichtigt werden.

Das Werk wendet sich an Studierende höherer Semester der verschiedensten Fachrichtungen, wie Physik, Chemie, angewandte Mathematik und sämtlicher technischen Fächer, doch wird auch der Fachwissenschaftler und der für Atomfragen interessierte Industrielle größten Nutzen aus dem Werk ziehen können, da es einerseits die modernsten Probleme der Reaktortheorie, wie die Störungstheorie oder die Transporttheorie schneller Reaktoren, berücksichtigt, und andererseits auch schwierigere mathematische Probleme in einer auch für den Nichttheoretiker verständlichen Weise behandelt. Die einzelnen Paragraphen sind durch Übungsbeispiele ergänzt.

Das Buch, das nicht nur als Lehrbuch, sondern auch als Handbuch und Nachschlagewerk gedacht ist, verfügt über ein sehr ausführliches Literatur- und Sachwortverzeichnis (deutsch-englisch) und gibt über alle wichtigen, bisher bekannten kernphysikalischen Daten Auskunft.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung